



NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK

Kontakt under eksamen: Jon Andreas Støvneng, telefon: 45 45 55 33 / 73 59 36 63

EKSAMEN I FY1001 og TFY4145 MEKANISK FYSIKK

Tirsdag 18. desember 2012 kl. 0900 - 1300

Bokmål

Tillatte hjelpemidler (kode C):

- Bestemt enkel godkjent kalkulator.
- Rottmann: Matematisk formelsamling.
- C. Angell og B. E. Lian: Fysiske størrelser og enheter.
- Vedlagt formelark (side 7).

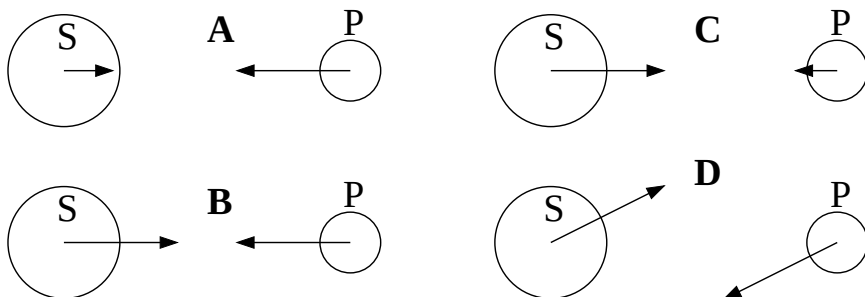
Sensurdato: Senest 18. januar 2013.

Prosenttallene i parentes gitt ved hver oppgave angir hvor mye den i utgangspunktet vektlegges ved bedømmelsen. I de fleste tilfeller er det fullt mulig å løse etterfølgende punkter selv om et punkt foran skulle være ubesvart.

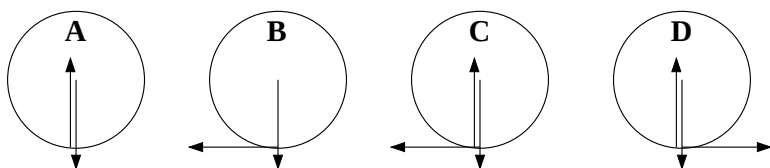
Noen generelle merknader:

- Symboler i kursiv (f.eks. m for masse), enheter uten kursiv (f.eks. m for meter)
- Vektorer med fete bokstaver (f.eks. $\mathbf{p}$)
- $\hat{x}$ er enhetsvektor i x -retning etc.
- Ved tallsvar kreves både tall og enhet.

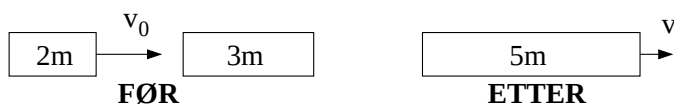
I flervalgsspørsmålene er kun ett av svarene rett. Du skal altså svare A, B, C eller D. Rett svar gir 2.5 p, galt svar (eller flere svar) gir 0 p. Skriv svarene dine på et vanlig svarark.

Oppgave 1. Ti flervalgsspørsmål. (Teller 25%)**a.**

Hvilken figur angir korrekt de innbyrdes kreftene mellom stjerne (S) og planet (P)?

b.

Ei kule ruller med konstant hastighet på et horisontalt underlag, uten å gli ("ren rulling"). Hvilken figur viser kreftene som virker på kula?

c.

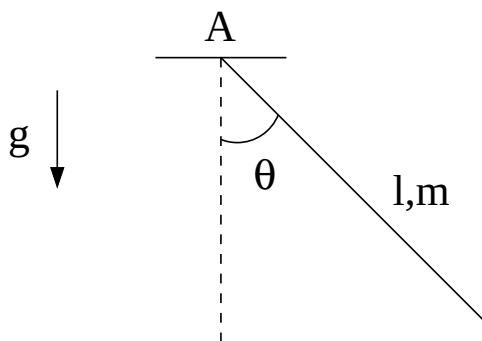
En kloss med masse $2m$ kolliderer fullstendig uelastisk med en kloss med masse $3m$. Før kollisjonen har klossen med masse $2m$ hastighet v_0 mens klossen med masse $3m$ ligger i ro. Etter kollisjonen har klossene felles hastighet v . Hvor mye mekanisk energi har gått tapt i kollisjonen?

- A $mv_0^2/3$ B $2mv_0^2/5$
 C $3mv_0^2/5$ D mv_0^2

d.

Dersom relativ usikkerhet i masse og hastighet er hhv $\Delta m/m$ og $\Delta v/v$, hva blir da relativ usikkerhet i kinetisk energi?

- A $\sqrt{2(\Delta m/m)^2 + (\Delta v/v)^2}$ B $\sqrt{(\Delta m/m)^2 + 2(\Delta v/v)^2}$
 C $\sqrt{(\Delta m/m)^2 + 4(\Delta v/v)^2}$ D $\sqrt{(\Delta m/m)^2 + (\Delta v/v)^2}$



Figuren til venstre er knyttet til oppgavene 1e - 1j. Ei tynn og jevntykk stang med lengde l og masse m kan svinge fritt om festepunktet A. Stangas treghetsmoment med hensyn på en akse vinkelrett på stanga og gjennom dens massesenter er $I_0 = ml^2/12$. Stangas bevegelse kan beskrives ved vinkelen θ mellom stanga og vertikalretningen. ($\theta > 0$ for utsving mot høyre, som i figuren.)

e. Hva er stangas treghetsmoment I_A med hensyn på en akse vinkelrett på stanga og gjennom festepunktet A (dvs parallell med aksene gjennom massesenteret, nevnt innledningsvis)?

- A $ml^2/3$ B $ml^2/4$ C $ml^2/6$ D $ml^2/12$

f. Hva er tyngdekraftens dreiemoment τ_A med hensyn på festepunktet A?

- A $-mgl/2$ B $-(mgl/2) \tan \theta$ C $-(mgl/2) \cos \theta$ D $-(mgl/2) \sin \theta$

g. Stangas vinkelhastighet er $\dot{\theta} = d\theta/dt$. Hva er stangas dreieimpuls L_A med hensyn på festepunktet A?

- A $ml^2\dot{\theta}$ B $ml^2\dot{\theta}/2$ C $ml^2\dot{\theta}/3$ D $ml^2\dot{\theta}/5$

h. Anta at stanga slippes med null starthastighet fra horisontal orientering ($\theta = \pi/2$). Hva blir da stangas vinkelhastighet $\dot{\theta}$ som funksjon av vinkelen θ ? (Tips: Energibevarelse.)

- A $\sqrt{3g \cos \theta/l}$ B $\sqrt{3g \sin \theta/l}$ C $\sqrt{3g \tan \theta/l}$ D $\sqrt{3g(1 - \cos \theta)/l}$

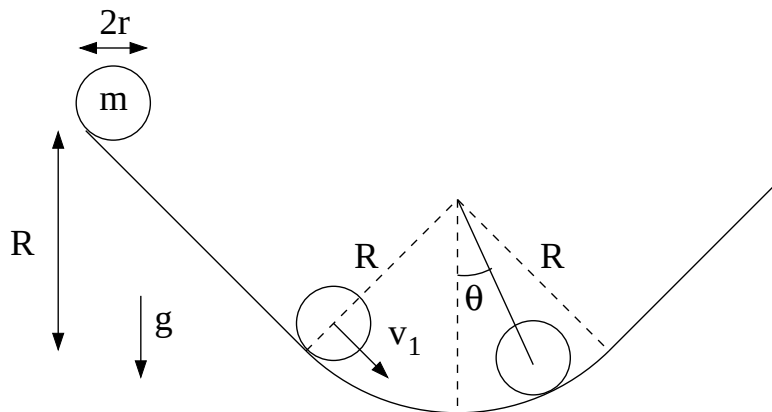
i. Fra sin horisontale orientering ($\theta = \pi/2$), hvor lang tid tar det (omtrent) for stanga å svinge over til motsatt side ($\theta = -\pi/2$)? Oppgitt:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{\cos x}} \simeq 5.244$$

- A $6\sqrt{g/l}$ B $3\sqrt{g/l}$ C $3\sqrt{l/g}$ D $6\sqrt{l/g}$

j. Hvis stanga slippes fra en *liten* startvinkel θ_0 (dvs $\theta_0 \ll 1$), vil den svinge fram og tilbake som en harmonisk oscillator, med svingeperiode

- A $\sqrt{8\pi^2 g/3l}$ B $\sqrt{2\pi^2 g/l}$ C $\sqrt{2\pi^2 l/g}$ D $\sqrt{8\pi^2 l/3g}$

Oppgave 2. Ren rulling. (Teller 35%)

Ei massiv kule har masse m , radius r og treghetsmoment $I_0 = 2mr^2/5$ med hensyn på en akse gjennom massesenteret. Kula ruller uten å gli ("ren rulling"), først nedover et skråplan med helningsvinkel $\pi/4$ og lengde $\sqrt{2}R$ (pkt a - e), og deretter på "innsiden" av en kvartsirkel med radius $R > r$ (pkt f - g). Kula slippes med null starthastighet ved toppen av skråplanet. Friksjonskoeffisienten mellom kule og underlag er μ .

- a. Tegn en figur ("fritt-legeme-diagram") som viser kreftene som virker på kula når den ruller nedover skråplanet.
- b. Hva er normalkraften N fra underlaget på kula når den ruller nedover skråplanet?
- c. Hva er kulas hastighet v_1 ved overgangen fra skråplan til kvartsirkel? (Tips: Energibevarelse.)
- d. Hva er friksjonskraften f fra underlaget på kula når den ruller nedover skråplanet? (Tips: N2 for translasjon og rotasjon.)
- e. Hvor stor må friksjonskoeffisienten μ minst være for at kula skal rulle uten å gli nedover skråplanet?
- f. Finn et uttrykk for normalkraften $N(\theta)$ fra underlaget på kula når den ruller på kvartsirkelen ($|\theta| < \pi/4$). (Tips: Energibevarelse og sentripetalakselerasjon. Hvis du ikke har et uttrykk for v_1 fra punkt c, kan v_1 inngå i svaret.)
- g. Dersom kula ruller fram og tilbake omkring bunnen av banen, med liten amplitude θ_0 , beskrives bevegelsen av ligningen for en harmonisk oscillator,

$$\ddot{\theta} + \Omega^2\theta = 0.$$

Vis dette, og finn derved et uttrykk for svingebevegelsens vinkelfrekvens Ω . (Tips: N2 for translasjon og rotasjon, samt tilnærmelsen $\sin x \approx x$ når $|x| \ll 1$.)

Oppgave 3. Planetbane. (Teller 20%)

En planet (masse m) beveger seg i ellipseformet bane rundt sola (masse $M \gg m$). Vi antar at sola står i ro i origo. Planetens bane, i polarkoordinater, er da gitt ved

$$r(\theta) = \frac{r_0}{1 + \varepsilon \cos \theta}.$$

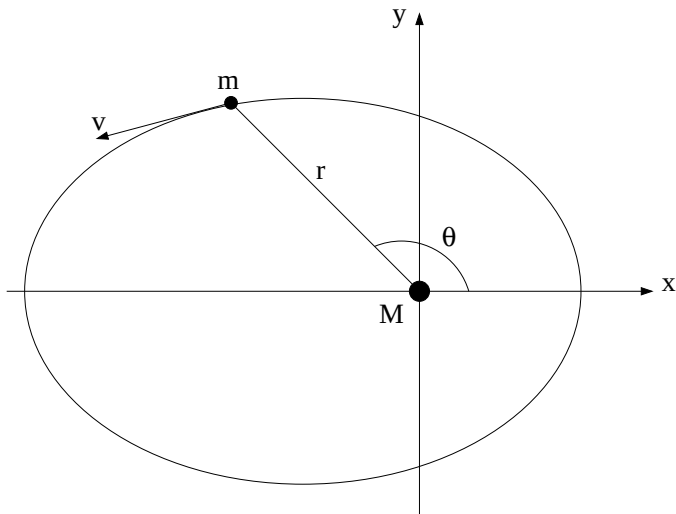
Her er

$$\varepsilon = \left(1 + 2EL^2/G^2 M^2 m^3\right)^{1/2}$$

banens eksentrisitet ($0 < \varepsilon < 1$),

$$r_0 = L^2/GMm^2$$

er planetens avstand fra sola når $\theta = \pm\pi/2$, $E = mv^2/2 - GMm/r < 0$ er planetens energi, $L = mr^2\dot{\theta}$ er dens (bane-)dreieimpuls, og G er den universelle gravitasjonskonstanten. Vi kan her se bort fra planetens "indre" dreieimpuls knyttet til rotasjon omkring aksen gjennom planetens massesenter.



a. Argumenter kort for at planetens energi E er bevart. Argumenter også kort for at dens dreieimpuls L er bevart.

b. Tegn opp figuren ovenfor og angi hvor planeten er henholdsvis nærmest (r_1) og lengst unna (r_2) sola. Skriv ned r_1 og r_2 (uttrykt ved ε og r_0).

c. Planetens hastighet $\mathbf{v}$ har både en radiell komponent $\dot{r}\hat{r}$ og en angulær komponent $r\dot{\theta}\hat{\theta}$. Bruk dette til å uttrykke energien på formen

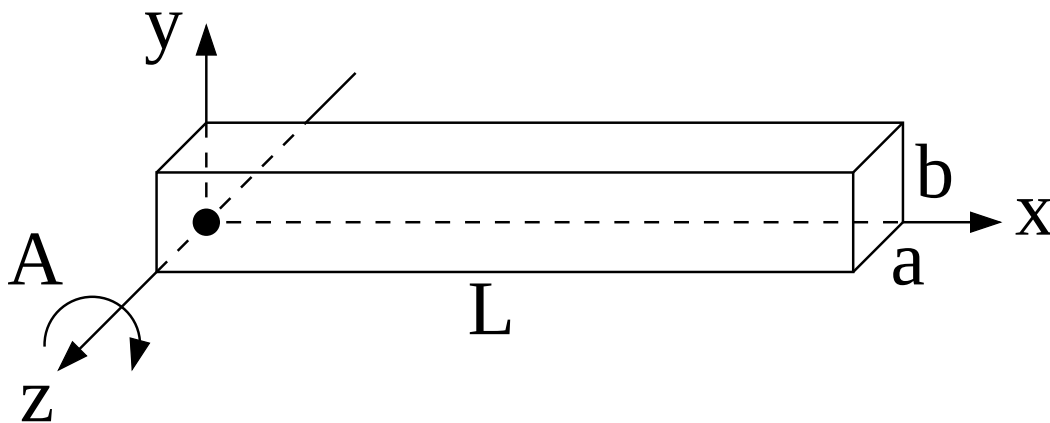
$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{A}{r^2} - \frac{GMm}{r},$$

og fastlegg derved (den positive) konstanten A . Dette betyr at planetens bevegelse i *to* dimensjoner, med potensiell energi $U(r) = -GMm/r$, er ekvivalent med bevegelse i *en* dimensjon (r), med potensiell energi $\tilde{U}(r) = A/r^2 - GMm/r$.

d. Skisser funksjonen $\tilde{U}(r)$. For hvilken verdi av r har $\tilde{U}$ sitt minimum? Merk av i skissen for $\tilde{U}(r)$ en verdi $E < 0$ for planetens totale energi som tilsvarer en ellipseformet bane. Indiker i skissen hvilket r -intervall planeten beveger seg på.

Oppgave 4. Numerikk. (Teller 10%)

Fra uttrykket for energien E i oppgave 3c kan (den radiale komponenten av) hastigheten skrives på formen $dr/dt = V(r)$. Bruk dette som utgangspunkt til å formulere en oppskrift ("algoritme") som beregner planetens bevegelse, $r(t)$ og $\theta(t)$, med en enkel numerisk metode. Tips: Bruk konstant tidssteg dt og anta at $r(0) = r_1$ og $\theta(0) = 0$. Formuler en løkke ("while-løkke") som oppdaterer r først, og deretter θ (som kan finnes når r er bestemt, se innledningen i oppgave 3). Løkken gjentas så lenge $r < r_2$. Du kan anta at alle konstanter (E , M etc) som inngår i uttrykket for $V(r)$ allerede har fått tilordnet tallverdier i programmet. Prøv å tilordne en noenlunde fornuftig verdi på tidssteget dt , uttrykt ved de ulike konstantene som inngår i problemet. NB: Det legges *ikke* vekt på syntaks. Det er med andre ord ikke nødvendig å huske spesifikke kommandoer i (f.eks) matlab. En oppskrift med 5 – 10 linjer er tilstrekkelig.

Oppgave 5. Trehetsmoment. (Teller 10%)

En rektangulær bjelke har uniform massetetthet, total masse M og dimensjoner L , b og a langs henholdsvis x -, y - og z -aksen. Bjelken kan rotere om en akse A, her sammenfallende med z -aksen, se figur ovenfor. (Origo er merket med en svart sirkel.) Bestem bjelkens treghetsmoment I_A med hensyn på aksene A. Tips: Legg sammen (integrer) bidragene $(x^2 + y^2)dm$ for tynne staver parallelle med z -aksen (tverrsnitt $dx \cdot dy$) slik at hele bjelken regnes med.

FORMLER.

Formlenes gyldighetsområde og symbolenes betydning antas å være kjent. Symbolbruk og betegnelser som i forelesningene. Vektorer med fete typer.

Newtons andre lov: $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ $\mathbf{p} = m\mathbf{v} = m\dot{\mathbf{r}}$

Konstant akselerasjon: $v = v_0 + at$ $x = x_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2$

Konstant vinkelakselerasjon: $\omega = \omega_0 + \alpha t$ $\theta = \theta_0 + \omega_0t + \frac{1}{2}\alpha t^2$

Arbeid: $dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ Kinetisk energi: $K = \frac{1}{2}mv^2$

Konservativ kraft og potensiell energi: $U(\mathbf{r}) = -\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ $\mathbf{F} = -\nabla U(\mathbf{r})$

Friksjon, statisk: $f \leq \mu_s N$ kinetisk: $f = \mu_k N$

Luftmotstand (liten v): $\mathbf{f} = -k\mathbf{v}$ Luftmotstand (stor v): $\mathbf{f} = -bv^2\hat{v}$

Tyngdepunkt (Massesenter): $\mathbf{R}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_i \mathbf{r}_i m_i \rightarrow \frac{1}{M} \int \mathbf{r} \cdot dm$

Sirkelbevegelse: $v = r\omega$ Sentripetalakselerasjon: $a = -v^2/r$ Baneakselerasjon: $a = dv/dt = r d\omega/dt$

Dreiemoment: $\boldsymbol{\tau} = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{F}$ Statisk likevekt: $\sum \mathbf{F}_i = 0$ $\sum \boldsymbol{\tau}_i = 0$

Dreieimpuls: $\mathbf{L} = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{p}$ $\boldsymbol{\tau} = d\mathbf{L}/dt$

Stive legemer, sylindersymmetri mhp rotasjonsaksen: $\mathbf{L} = \mathbf{L}_b + \mathbf{L}_s = (\mathbf{R}_{CM} - \mathbf{r}_0) \times M\mathbf{V} + I_0\boldsymbol{\omega}$

Kinetisk energi, stivt legeme: $K = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}I_0\omega^2$ Tregghetsmoment: $I = \sum_i m_i r_i^2 \rightarrow \int r^2 dm$

Steiners sats (parallellaksesteoremet): $I = I_0 + Md^2$

Gravitasjon: $\mathbf{F} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r}$ $U(r) = -\frac{GMm}{r}$ $\mathbf{g} = \mathbf{F}/m$ $V(r) = U(r)/m$

Enkel harmonisk oscillator: $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ $T = 2\pi/\omega$ $f = 1/T = \omega/2\pi$

Masse i fjær: $\omega = \sqrt{k/m}$ Fysisk pendel: $\omega = \sqrt{mgd/I}$ Matematisk pendel: $\omega = \sqrt{g/L}$

Dempet svingning, langsom bevegelse i fluid: $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$

Underkritisk damping ($\gamma = b/2m$, $\omega_0^2 = k/m$): $x(t) = Ae^{-\gamma t} \sin(\omega t + \phi)$ $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$

Overkritisk damping: $x(t) = Ae^{-\alpha_1 t} + Be^{-\alpha_2 t}$ $\alpha_{1,2} = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$

Tvungen svingning, harmonisk ytre kraft: $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0 \cos \omega t$

(partikulær-)løsning: $x(t) = A(\omega) \sin(\omega t + \phi(\omega))$

amplitude: $A(\omega) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}}$ $\omega_0^2 = k/m$

Kraft $\mathbf{F}$ målt i koordinatsystem S som roterer med vinkelfrekvens $\boldsymbol{\omega}$: $\mathbf{F} = \mathbf{F}' + m\omega^2 \boldsymbol{\rho}' + 2m\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}$
($\mathbf{F}'$ er kraft målt i inertialsystemet S', $\boldsymbol{\rho}'$ er avstand fra rotasjonsaksen, $\mathbf{u}$ er hastighet målt i S.)

Gauss' feilforplantningslov: $(\Delta q)^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial q}{\partial a_i} \Delta a_i \right)^2$

Middelverdi (gjennomsnittsverdi): $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$

Standardavvik (feil i enkeltmåling): $\delta_x = \sqrt{\left(\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 \right)}$

Standardfeil (feil i middelverdi): $\delta_{\bar{x}} = \delta_x / \sqrt{N}$

GOD JUL!

FORMLER.

Formlenes gyldighetsområde og symbolenes betydning antas å være kjent. Symbolbruk og betegnelser som i forelesningene. Vektorer med fete typer.

Newtons andre lov: $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ $\mathbf{p} = m\mathbf{v} = m\dot{\mathbf{r}}$

Konstant akselerasjon: $v = v_0 + at$ $x = x_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2$

Konstant vinkelakselerasjon: $\omega = \omega_0 + \alpha t$ $\theta = \theta_0 + \omega_0t + \frac{1}{2}\alpha t^2$

Arbeid: $dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ Kinetisk energi: $K = \frac{1}{2}mv^2$

Konservativ kraft og potensiell energi: $U(\mathbf{r}) = - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ $\mathbf{F} = -\nabla U(\mathbf{r})$

Friksjon, statisk: $f \leq \mu_s N$ kinetisk: $f = \mu_k N$

Luftmotstand (liten v): $\mathbf{f} = -k\mathbf{v}$ Luftmotstand (stor v): $\mathbf{f} = -bv^2\hat{v}$

Tyngdepunkt: $\mathbf{R}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_i \mathbf{r}_i m_i \rightarrow \frac{1}{M} \int \mathbf{r} \cdot dm$

Sirkelbevegelse: $v = r\omega$ Sentripetalakselerasjon: $a = -v^2/r$ Baneakselerasjon: $a = dv/dt = r d\omega/dt$

Dreiemoment: $\boldsymbol{\tau} = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{F}$ Statisk likevekt: $\sum \mathbf{F}_i = 0$ $\sum \boldsymbol{\tau}_i = 0$

Dreieimpuls: $\mathbf{L} = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{p}$ $\boldsymbol{\tau} = d\mathbf{L}/dt$

Stive legemer, sylindersymmetri mhp rotasjonsaksen: $\mathbf{L} = \mathbf{L}_b + \mathbf{L}_s = (\mathbf{R}_{CM} - \mathbf{r}_0) \times M\mathbf{V} + I_0\boldsymbol{\omega}$

Kinetisk energi, stivt legeme: $K = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}I_0\omega^2$ Trehetsmoment: $I = \sum_i m_i r_i^2 \rightarrow \int r^2 dm$

Steiners sats (parallellakse-teoremet): $I = I_0 + Md^2$

Gravitasjon: $\mathbf{F} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r}$ $U(r) = -\frac{GMm}{r}$ $\mathbf{g} = \mathbf{F}/m$ $V(r) = U(r)/m$

Enkel harmonisk oscillator: $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ $T = 2\pi/\omega$ $f = 1/T = \omega/2\pi$

Masse i fjær: $\omega = \sqrt{k/m}$ Fysisk pendel: $\omega = \sqrt{mgd/I}$ Matematisk pendel: $\omega = \sqrt{g/L}$

Dempet svingning, langsom bevegelse i fluid: $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$

Underkritisk damping: $x(t) = Ae^{-bt/2m} \sin(\omega t + \phi)$ $\omega = \sqrt{k/m - b^2/4m^2}$

Overkritisk damping: $x(t) = Ae^{-t/\tau_1} + Be^{-t/\tau_2}$ $\tau_{1,2} = \left(b/2m \pm \sqrt{b^2/4m^2 - k/m} \right)^{-1}$

Tvungen svingning, harmonisk ytre kraft: $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0 \cos \omega t$

(partikulær-)løsning: $x(t) = A(\omega) \sin(\omega t + \phi(\omega))$

amplitude: $A(\omega) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (b\omega/m)^2}}$ $\omega_0^2 = k/m$

Kraft $\mathbf{F}$ målt i koordinatsystem S som roterer med vinkelfrekvens $\boldsymbol{\omega}$: $\mathbf{F} = \mathbf{F}' + m\omega^2 \boldsymbol{\rho}' + 2m\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}$
($\mathbf{F}'$ er kraft målt i inertialsystemet S', $\boldsymbol{\rho}'$ er avstand fra rotasjonsaksen, $\mathbf{u}$ er hastighet målt i S.)

Gauss' feilforplantningslov: $(\Delta q)^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial q}{\partial a_i} \Delta a_i \right)^2$

Middelverdi (gjennomsnittsverdi): $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$

Standardavvik (feil i enkeltmåling): $\delta_x = \sqrt{\left(\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 \right)}$

Standardfeil (feil i middelverdi): $\delta_{\bar{x}} = \delta_x / \sqrt{N}$