

Faglig kontakt under eksamen:
Arne Mikkelsen
Tlf.: 93433

EKSAMEN I FAG
74233 ELEKTRISITET OG MAGNETISME 1
Onsdag 22. mai 1996
Tid: kl. 0900 - 1300

Hjelpemidler:

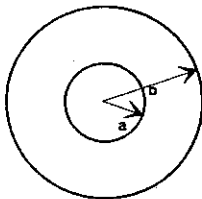
B2 - Typegodkjent kalkulator, med tomt minne, i henhold til liste utarbeidet av NTH tillatt.
Karl Rottmann: Matematisk formelsamling.
Øgrim & Lian: Størrelser og enheter i fysikk og teknikk.
NB. I tillegg til formelsamlingene fins formler på siste side.

Ved bedømmelsen teller hver deloppgave a,b, etc. like mye (totalt 11 vekttall).
Vektorstørrelser er angitt i fete typer, eks: **E**, **D**. For vektorstørrelser skal også retning angis.



Oppgave 1.

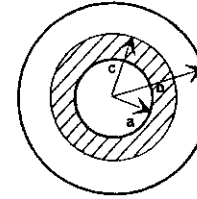
Figuren viser en kulekondensator som består av to tynne kuleskall av elektrisk ledende materiale og med radius henholdsvis a og b . Innerskallet har elektrisk ladning $+Q$ og yterskallet ladning $-Q$.



a) Beregn den elektriske feltstyrken **E** og flukstettheten **D** overalt i rommet uttrykt ved avstanden r fra sentrum av kulene.

b) Beregn det elektriske potensialet V relativt uendelig for alle r . Finn potensialforskjellen (spenningen) mellom kuleskallene. Beregn tilslutt kapasitansen for kondensatoren.

c) Beregn den totale lagrede elektrostatisk energi W_e (relativt uendelig) for kondensatoren ved å foreta en integrasjon i rommet. Beregn også W_e ved å bruke uttrykk der kapasitansen for kondensatoren inngår.



En del av området mellom kuleskallene, fra radius a til radius c , fylles med et dielektrikum med relativ permittivitet ϵ_r . Ladningene på lederskallene holdes uendret.

d) Finn uttrykk for den elektriske feltstyrken **E**(r) overalt i rommet. Beregn potensialforskjellen mellom kuleskallene.

e) Beregn polariseringen **P**(r) overalt i rommet og bundet overflateledning σ_B der denne finnes. Angi fortegn for σ_B .

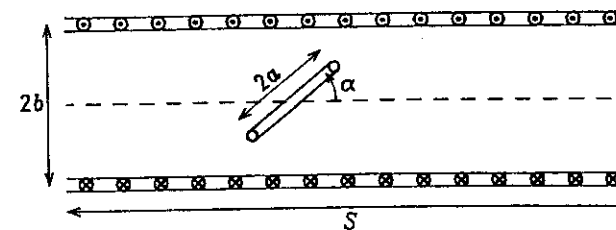


Oppgave 2.

En rett, tettviklet solenoide har N viklinger, lengde S og radius b . Solenoiden er luftfylt og det går strøm I_1 i viklingene med strømretning vist i figuren. Anta at $S \gg b$ slik at du kan sette magnetisk flukstetthet B lik null utenfor solenoiden og $B = \mu_0 I_1 N/S$ inni.

a) Beregn solenoidens selvinduktans L_S .

En lukket, sirkulær strømsløyfe med radius a plasseres inne i solenoiden med vinkel α mellom sløyfeplanet og solenoidens lengderetning, som vist i figuren. Vinkel α kan ha verdier i området $[-\pi, \pi]$.



b) Beregn den gjensidige induktansen M mellom solenoiden og strømsløyfen som funksjon av α .

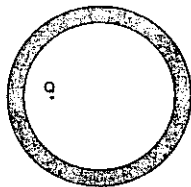
Anta nå at den sirkulære sløyfen er laget av ideelt ledende materiale, dvs at resistansen $R = 0$ i sløyfen. Tenk deg at sløyfen først er plassert utenfor solenoiden og at sløyfestrømmen I_2 da er lik null. Sløyfen føres så inn i solenoiden og plasseres som vist i figuren over mens solenoidestrømmen I_1 holdes konstant. Sløyfens selvinduktans $L_2 = \Phi_m/I_2$ kan antas kjent.

c) Vis at strømmen I_2 som settes opp i sløyfen kan uttrykkes $I_2 = K \sin \alpha$ og bestem konstanten K (der bl.a. L_2 inngår). Vis i en figur retningen på strømmen for $\alpha = \pi/4$ og $\alpha = -\pi/4$.

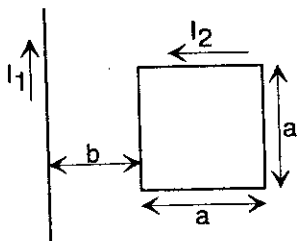
d) Finn dreiemomentet τ som virker på sløyfen uttrykt ved bl.a. α og L_2 og vis at $\tau = 0$ for fire verdier av α . For hvilken/hvilke α vil sløyfen ha stabil likevekt?

Oppgave 3.

En positiv punktladning $+Q$ er plassert inne i et kuleskall av metall. Først er ladningen plassert i sentrum av kula. Betrakt et plansnitt gjennom sentrum av kula og tegn opp elektriske feltlinjer i hele dette planet. Marker også eventuelle induerte ladninger. Deretter forskyves ladningen ca. 2/3 mot venstre vegg, som vist i figuren under. Skisser på ny elektriske feltlinjer og eventuelle induerte ladninger slik at vesentlige detaljer kommer tydelig fram.



Oppgave 4.



Figuren viser en uendelig lang, rett leder som fører strømmen $I_1 = 20$ A. En kvadratisk, tynn ledersløyfe med sidekant $a = 20$ cm er plassert med venstre sidekant i avstand $b = 5,0$ cm fra den rette lederen. Sløyfa ligger i et plan gjennom den rette lederen. Ledersløyfa fører en strøm $I_2 = 5,0$ A i retning mot urviserne. Det hele er omgitt av luft.

Vis på en figur retning for alle magnetiske krefter som virker på hver sidekant av den kvadratiske strømsløyfa. Beregn summen av kreftene (tallstørrelse og retning). Du kan forenkle utregningen ved å bruke symmetriargument. Uttrykk for magnetfelt rundt en lang, rett leder, $H = I/(2\pi r)$, behøver ikke utledes.

(formler neste side)

Noen av disse formler kan du få bruk for. Du må selv tolke symbolene, men bevis trengs ikke. $\int$ representerer enkelt eller dobbeltintegral over henholdsvis lukket kurve eller lukket flate.

$$\int \mathbf{D} \, d\mathbf{A} = Q$$

$$\text{div } \mathbf{D} = \rho$$

$$\int \mathbf{E} \, d\mathbf{s} = -\partial\Phi_m/\partial t$$

$$\text{curl } \mathbf{E} = -\partial\mathbf{B}/\partial t$$

$$\int \mathbf{B} \, d\mathbf{A} = 0$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0$$

$$\int \mathbf{H} \, d\mathbf{s} = I + \partial\Psi/\partial t$$

$$\text{curl } \mathbf{H} = \mathbf{J} + \partial\mathbf{D}/\partial t$$

$$\text{div } \mathbf{P} = -\rho_B$$

$$\text{div } \epsilon_0 \mathbf{E} = \rho + \rho_B$$

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma$$

$$E_{1t} = E_{2t}$$

$$P_{2n} - P_{1n} = -\sigma_B$$

$$B_{1n} = B_{2n}$$

$$H_{2t} - H_{1t} = k (= I/l)$$

$$dW = \frac{1}{2} V \, dq$$

$$w = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}$$

$$w_m = \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}$$

$$\mathcal{E} = -\partial\Phi_m/\partial t$$

Sylinderkoordinater (ρ, ϕ, z) :

$$\nabla V = \hat{\rho} \frac{\partial V}{\partial \rho} + \hat{\phi} \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \phi} + \hat{z} \frac{\partial V}{\partial z}$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho D_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial D_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial V}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Kulekoordinater (r, θ, ϕ) :

$$\nabla V = \hat{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} + \hat{\phi} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi}$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 D_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (D_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial D_\phi}{\partial \phi}$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}$$

1

a) Gauss: $\oint \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q_{\text{inn}}$ kulesymmetri
 $\Rightarrow D \cdot 4\pi r^2 = \begin{cases} Q & r \in [a, b] \\ 0 & \text{ellers} \end{cases} \Rightarrow \vec{D} = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi} \frac{1}{r^2} \hat{r} & r \in [a, b] \\ 0 & \text{ellers} \end{cases} \Rightarrow \vec{E} = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \hat{r} & [a, b] \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$

b) $r > b$: $V(r) = - \int_{\infty}^r \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \int_{\infty}^r 0 \, dr = 0$
 $r \in [a, b]$: $V(r) = V(b) - \int_b^r \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0 - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_b^r \frac{1}{r^2} \, dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{b} \right]$
 $r \in [0, a]$: $V(r) = V(a) - \int_a^r \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right] - \int_a^r 0 \, dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right]$
 Mellom skallene: $U = V(a) - V(b) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right] - 0$

Kapasitans: $C \stackrel{\text{def}}{=} \frac{Q}{U} = \frac{4\pi\epsilon_0}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} = 4\pi\epsilon_0 \frac{ab}{b-a}$

c) Ener: $W_e = \frac{1}{2} \iiint V dq = \frac{1}{2} \cdot \iiint V(r) \, dq = \frac{1}{2} V(a) \cdot \iiint dq = \frac{1}{2} V(a) Q = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right]$
 $V dq = 0$ borte for plate $r = a$

eller $W_e = \frac{1}{2} \iiint \epsilon_0 E^2 d\tau = \frac{\epsilon_0}{2} \int_0^b 4\pi r^2 \cdot \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right)^2 \, dr = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \int_a^b \frac{1}{r^2} \, dr = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right]$
 (Kulekond.)

med kapasitans: $W_e = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$

d) Gauss gir at $\vec{D}(r)$ er som i a) $\Rightarrow \vec{E}(r) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \hat{r} & \text{for } r \in [a, c] \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \hat{r} & [c, b] \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$

$U = V(a) - V(b) = - \int_a^b \vec{E}(r) \cdot d\vec{r}$
 $= - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\int_a^c \frac{1}{r^2} \, dr + \int_c^b \frac{1}{r^2} \, dr \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{1}{a} \right)$ al. l.

e) $\vec{p} = \vec{D} - \epsilon_0 \vec{E} = \vec{D} - \epsilon_0 \frac{\vec{D}}{\epsilon_r} = (1 - \frac{1}{\epsilon_r}) \vec{D} = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \cdot \frac{Q}{4\pi} \frac{1}{r^2} \hat{r}$ for $r \in [a, c]$, ellers $p = 0$

$|\sigma_d| = |p_n| \Rightarrow \begin{cases} |\sigma_d(a)| = p(a) = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \cdot \frac{Q}{4\pi a^2} & \text{Dens er negativ} \\ |\sigma_d(c)| = p(c) = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \cdot \frac{Q}{4\pi c^2} & \text{Dens er positiv} \end{cases}$

2

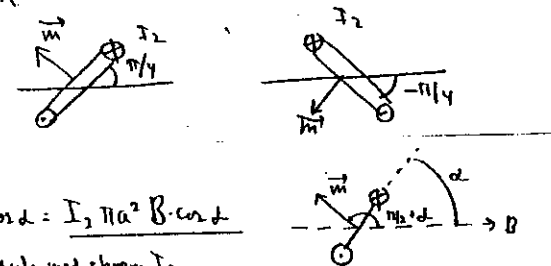
a) $\mathcal{E} = -N \dot{\Phi}_m \Rightarrow \mathcal{E} = -L_1 \dot{I}_1 \Rightarrow L_1 = N \frac{\dot{\Phi}_m}{\dot{I}_1} = N \frac{\Phi_m}{I_1} = N \cdot \frac{B \cdot A}{I_1} = \frac{N^2}{S} \mu_0 \pi b^2$
 samme kilsenlengde i Φ_m og I

b) $\mathcal{E} = -\dot{\Phi}_m$ og $\mathcal{E} = -M \dot{I}_1 \Rightarrow M = \frac{\dot{\Phi}_m}{\dot{I}_1} = \frac{\Phi_m}{I_1} = \frac{B \cdot A_2 \cdot \sin \alpha}{I_1} = \frac{N}{S} \mu_0 \pi a^2 \cdot \sin \alpha$
 $(k_2 = 1)$

c) Sløyfene setter seg inn i en annen fluksendring ved å sette opp en strøm som gir en fluke $\Phi_{m,2}$ motsatt like fluke (pga. solenoiden) som gir opprinnelsen. Denne strømmen vil opprettholde til alle tider siden $R = 0$ i sløyfa. Ems. er ikke interessant i dette tilfellet.

$\Phi_{m,1} = \Phi_{m,2}$ (mot venstre) (mot venstre)
 $B \cdot A_2 \cdot \sin \alpha = L_2 \cdot I_2$
 $\Rightarrow I_2 = \frac{B A_2}{L_2} \cdot \sin \alpha = \frac{I_1 \cdot \frac{N}{S} \mu_0 \pi a^2 \frac{1}{L_2} \cdot \sin \alpha}{1} = K$ QED

Betning på I_2 slik at $\Phi_{m,2}$ alltid går mot venstre:



d) $\vec{J} = |\vec{m} \times \vec{B}| = m B \cdot \sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = m B \cos \alpha = I_2 \pi a^2 B \cos \alpha$
 $\vec{m}$ er alltid langs normalen til strømsløyfa med strøm I_2

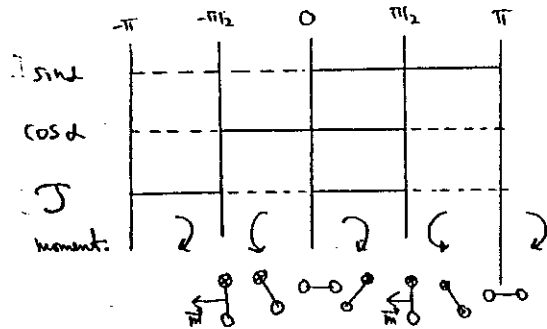
Sett inn for I_2 og B :
 $I_2 = I_1 \mu_0 \frac{N}{S} \pi a^2 \frac{\sin \alpha}{L_2}$ og $B = \mu_0 \frac{N}{S} I_1$ $\Rightarrow \vec{J} = I_1^2 \left(\mu_0 \frac{N}{S} \pi a^2 \right)^2 \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{L_2}$ at $\frac{1}{2} \sin 2\alpha$

Erst. her K ikke berørt i c): $\vec{J} = K \left(\mu_0 \frac{N}{S} \pi a^2 \right) \cdot I_1 \cdot \sin \alpha \cos \alpha = K^2 \cdot L_2 \cdot \sin \alpha \cos \alpha$

$\vec{J}$ har pos. forsegner ved i p-pjansenet:

$\vec{J} = 0$ for $\sin \alpha = 0$ eller $\cos \alpha = 0 \Rightarrow \alpha \in \{-\pi/2, 0, \pi/2, \pi\}$

Stabil likevekt kan behaktes ved foretegn p  $\vec{J}$ eller energibehakning:

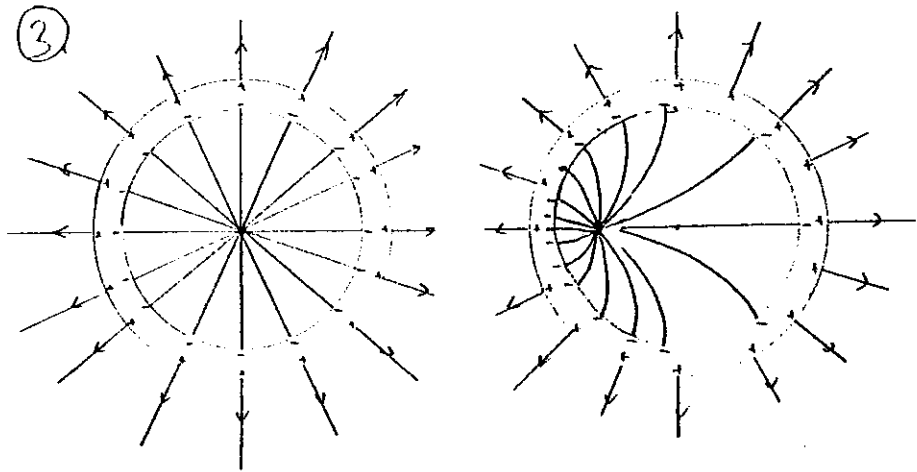
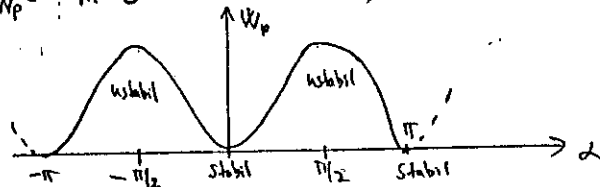


Seer l sje at $\alpha = 0$ og π er stabil likevekt (kraftmoment deien  lbale) mens $\pm \pi/2$ er ustabil

Merke at $\vec{m} \parallel \vec{B}$ aldri aktuell men $\vec{m}$ antiparallell $\vec{B}$ for $\pm \pi/2$ (ustabil)

 rt. energibehakning:

$$W_p = -\vec{m} \cdot \vec{B} = -m \cdot B \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = +\text{konst} \cdot \sin \alpha \cdot \sin \alpha$$

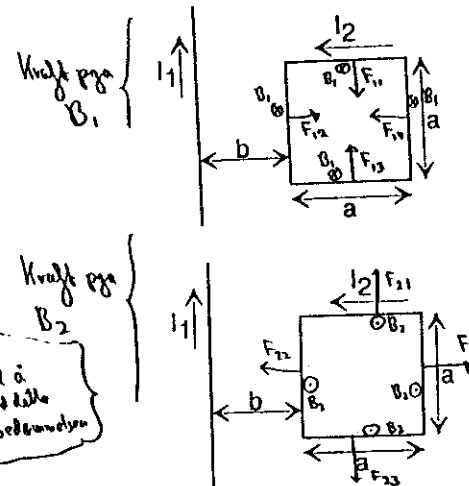


Alle feltlinjer normalt inn/ut elektrisk ledende materiale

$$|\Sigma(-)| = \Sigma(+)=Q \quad (\text{folger fra Gauss lov og ladn. fritt i leder})$$

Den delen av lederveggen som ligger n rmest ladningene for  st rt ladn. tetthet (feltlinjene er t t) Men p  utside fordeles ladningene  lltids j mt (jfr. Faraday bur)

4.



B_i = magnetfelt fra strøm I_i

F_{ij} = kraft p  bit j p  magnetfelt B_i

F_{21} og F_{33} opphever hverandre

F_{24} og F_{32} opphever hverandre

F_{11} og F_{13} — " —

Beregn F_{12} og F_{14} :

$$\Sigma F = F_{12} - F_{14} = I_2 \cdot a \cdot B_1(b) - I_2 \cdot a \cdot B_1(a+b)$$

$$= I_2 \cdot a \cdot \mu_0 \frac{I_1}{2\pi b} - I_2 \cdot a \cdot \mu_0 \frac{I_1}{2\pi(a+b)} \quad (= 80 \mu N - 16 \mu N)$$

$$= I_1 I_2 \frac{a}{b} \frac{\mu_0}{2\pi} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a+b} \right) = 20 A \cdot 5 A \cdot \frac{0,2}{2\pi} \cdot \frac{\mu_0}{25} = 64 \mu N \quad \text{rehting h ttre}$$

NORGES TEKNISK-
NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Arne Mikkelsen
Tlf.: 93433

KONTINUASJONSEKSAMEN I FAG
74233 ELEKTRISITET OG MAGNETISME 1
Torsdag 8. august 1996
Tid: kl. 0900 - 1300

Hjelpemidler:

B2- Typegodkjent kalkulator, med tomt minne, i henhold til liste utarbeidet av NTH tillatt.
Karl Rottmann: Matematisk formelsamling.
Øgrim & Lian: Størrelser og enheter i fysikk og teknikk.
NB. I tillegg til formelsamlingene fins formler på siste side.

Ved bedømmelsen teller hver deloppgave a, b, etc. like mye (totalt 10 vekttall).
Vektorstørrelser er angitt i fete typer, eks: **E**, **D**. For vektorstørrelser skal også retning angis.

 Oppgave 1.

Ei kule av ledende materiale har radius $R_1 = 8,00$ cm og ladning $20 \mu\text{C}$.

a) Sett opp uttrykk for elektrisk felt **E** i alle deler av rommet. Beregn på dette grunnlag potensialet (relativt uendelig) på overflata av kula (tallsvar).

I oppgave b) og c) blir Kule 1 sammenkoplet med ei anna lederkule nr. 2 gjennom en lang, tynn ledning. Kule 2 har radius $R_2 = 6,00$ cm og er ladningsfri før sammenkoplingen.

b) Beregn ladningen på hver av kulene etter forbindelsen. Du kan se bort fra ladning i selve ledningen. Videre er avstanden mellom kulene så stor at du kan se bort fra effekten av det elektriske feltet fra den ene kula ved overflaten av den andre kula.

c) Hva er potensialet på kule 1 og kule 2 etter sammenkoplingen? Beregn også total elektrisk energi for systemet før og etter sammenkoplingen. Hvordan kan du forklare eventuelt tap i energi?

Oppgave 2.

Ei kule med radius r_0 og permittivitet $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ har romladning $\rho(r) = \rho_0 r/r_0$, der $\rho_0 > 0$. Utenfor kula er det ingen ladning og permittiviteten her er ϵ_0 .

a) Beregn den totale ladningen Q_{tot} i kula og finn den elektriske flukstetthet **D**(**r**) for alle **r**.

b) Finn bundet ladning $\sigma_B(r_0)$ på kuleoverflata $r = r_0$. Angi fortegnet.

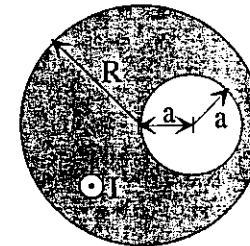
c) Finn bundet romladning $\rho_B(r)$ for $r < r_0$. Vis i en skisse hvordan elektriske dipoler kan representere polariseringen og forklare hvordan bundet romladning $\rho_B(r)$ og flateladning $\sigma_B(r_0)$ framkommer. Forklar også fortegnet til ρ_B og σ_B vha. dipolene.

 Oppgave 3.

En lang, rett sylindrisk kopperleder med radius R fører en strøm I . Strømtettheten er den samme over hele ledertverrsnittet. La ledningen stå normalt på papirplanet med strømretning opp av papirplanet.

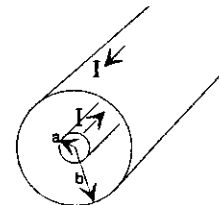
a) Finn den magnetiske feltstyrken **H**(**r**) inne i lederen uttrykt i sylinderkoordinater (r = avstand fra lederaksen). Finn også svaret uttrykt i kartesiske koordinater, dvs. finn x - og y -komponentene av **H** med x og y innført i uttrykkene. Origo i lederens akse.

Inne i lederen blir det så boret et sylindrisk hull med radius a og med akse parallelt med lederaksen i en avstand a fra denne (se figur). Strømmen er fortsatt I , fordelt med lik strømtetthet over den gjenværende delen av lederen. $2a < R$.



 b) Hva blir den nye strømtettheten i lederen? Finn H_x og H_y for et punkt (x, y) inne i hulrommet uttrykt ved strømmen I og radier R og a . Tips: Superposisjon av to strømførende ledere med motsatt like stor strømtetthet.

Oppgave 4.



En koaksialkabel består av en hul innerleder med radius a og en tynn ytterleder med radius b . Du kan for begge lederne se bort fra veggtykkelsen. Lengden er lik S . Isolasjonsmaterialet mellom lederne har permeabilitet μ_0 . Magnetisk feltstyrke mellom lederne er $H_\phi(r) = I/(2\pi r)$ når strømmen i lederne er $+I$ og $-I$ og r = avstand fra aksene.

a) Beregn magnetisk fluks Φ_m mellom lederne og vis hvilken retning denne har. Beregn deretter selvinduktansen L' pr lengdeenhet av kabelen ($L' = L/S$) ved å bruke definisjonslikningen for L .

b) Finn uttrykk for magnetisk energitetthet w som funksjon av avstand r fra aksene. Finn herfra også magnetisk energiinnhold pr. lengdeenhet av kabelen, W' .

Noen av disse formler kan du få bruk for. Du må selv tolke symbolene, men bevis trengs ikke. $\int$ representerer enkelt eller dobbeltintegral over henholdsvis lukket kurve eller lukket flate.

$$\int \mathbf{D} \, d\mathbf{A} = Q \quad \text{div } \mathbf{D} = \rho$$

$$\int \mathbf{E} \, d\mathbf{s} = -\partial\Phi_m/\partial t \quad \text{curl } \mathbf{E} = -\partial\mathbf{B}/\partial t$$

$$\int \mathbf{B} \, d\mathbf{A} = 0 \quad \text{div } \mathbf{B} = 0$$

$$\int \mathbf{H} \, d\mathbf{s} = I + \partial\Psi/\partial t \quad \text{curl } \mathbf{H} = \mathbf{J} + \partial\mathbf{D}/\partial t$$

$$\text{div } \mathbf{P} = -\rho_B \quad \text{div } \epsilon_0 \mathbf{E} = \rho + \rho_B$$

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma \quad E_{1t} = E_{2t} \quad P_{2n} - P_{1n} = -\sigma_B$$

$$B_{1n} = B_{2n} \quad H_{2t} - H_{1t} = k (= L/l)$$

$$dW = \frac{1}{2} V \, dq \quad \mathcal{E} = -\partial\Phi_m/\partial t$$

Sylinderkoordinater (ρ, ϕ, z) :

$$\nabla V = \hat{\rho} \frac{\partial V}{\partial \rho} + \hat{\phi} \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \phi} + \hat{z} \frac{\partial V}{\partial z}$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho D_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial D_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial V}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Kulekoordinater (r, θ, ϕ) :

$$\nabla V = \hat{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} + \hat{\phi} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi}$$

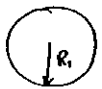
$$\nabla \cdot \vec{D} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 D_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (D_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial D_\phi}{\partial \phi}$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}$$

Lösningsskiss

1

a)



$Q = 20 \mu\text{C}$

E-fält runt kula ($r > R_1$): $E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ $E(r) = 0$ för $r < R_1$

Potential: $V(r) = -\int_{\infty}^r E(r) dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$

På kuleoverflatan $V(R_1) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_1} = \frac{20 \mu\text{C}}{4\pi \cdot 8.85 \cdot 10^{-12} \cdot 0.08 \text{ m}} = 2.25 \text{ MV}$

utgåva Energi: $W_E = \frac{1}{2} \int V dq = \frac{1}{2} V(R_1) \cdot Q = \frac{1}{2} \cdot 2.25 \text{ MV} \cdot 20 \mu\text{C} = 22.5 \text{ J}$
eller $W_E = \frac{1}{2} \int \epsilon_0 E^2 d\tau = \frac{1}{2} \int_{R_1}^{\infty} \epsilon_0 E^2 \cdot 4\pi r^2 dr = \dots = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{R_1} = 22.5 \text{ J}$

b)



Potential min var ladd över hela systemet (ledande material):

$$V_1 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} = V_2 = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} \Rightarrow \frac{Q_1}{R_1} = \frac{Q_2}{R_2}$$

$$\text{Innsett } Q_1 + Q_2 = Q \quad \frac{Q - Q_2}{R_1} = \frac{Q_2}{R_2} \Rightarrow Q_2 = Q \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 20 \mu\text{C} \cdot \frac{6}{14} = 8.6 \mu\text{C}$$

$$Q_1 = Q - Q_2 = 11.4 \mu\text{C}$$

c)

$$V_1 = V_2 = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} = \frac{8.6 \mu\text{C}}{4\pi \cdot 8.85 \cdot 10^{-12} \cdot 0.06 \text{ m}} = 1.28 \text{ MV}$$

Energi: $W_E = \frac{1}{2} \int V dq$ integrera den som laddning, du kan överflata

$$\text{För: } W_E = \frac{1}{2} V(R_1) \cdot Q = \frac{1}{2} \cdot 2.25 \text{ MV} \cdot 20 \mu\text{C} = 22.5 \text{ J}$$

$$\text{Eller: } W_E = \frac{1}{2} V_1 \cdot Q_1 + \frac{1}{2} V_2 \cdot Q_2 = \frac{1}{2} V_1 (Q_1 + Q_2) = \frac{1}{2} V_1 \cdot Q = \frac{1}{2} \cdot 1.28 \text{ MV} \cdot 20 \mu\text{C} = 12.8 \text{ J}$$

9.7 J är ladd i samma i omkrets mellan i laddning + i ladd skiljning
pga skiljda laddningar.

$$*) \text{ ladd (närvarande): } W_E = \int w_E d\tau = \frac{1}{2} \int \epsilon_0 E(r)^2 \cdot 4\pi r^2 dr = 0.5 \text{ J}$$

2)

a)

$$Q_{\text{tot}} = \int \rho d\tau = \int_0^{R_0} \rho_0 \cdot 4\pi r^2 dr \quad (\text{kulskall: } d\tau = 4\pi r^2 \cdot dr = \text{volym kulskall})$$

$$= \frac{\rho_0}{R_0} \int_0^{R_0} r^3 dr = \frac{\rho_0}{R_0} \cdot \frac{R_0^4}{4} = \frac{\rho_0 \pi R_0^3}{4}$$

$$\text{Laddning innanför } r = a: Q(r) = \int_0^r \rho_0 \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{\rho_0 \pi}{4} \cdot \frac{r^4}{R_0^3}$$

$$\Rightarrow \int \rho(r) d\tau = Q(r) \Rightarrow \rho(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{\rho_0 \pi}{4} \cdot \frac{r^4}{R_0^3} \Rightarrow \rho(r) = \frac{\rho_0}{4} \cdot \frac{r^2}{R_0^3} \text{ för } r < R_0$$

$\rho(r)$ har utgång $\hat{r}$

$$\rho(r) = \frac{Q_{\text{tot}}}{4\pi r^2} = \frac{\rho_0}{4} \cdot \frac{R_0^3}{r^2} \text{ för } r > R_0$$

b) Håll fast kända polariseringar:

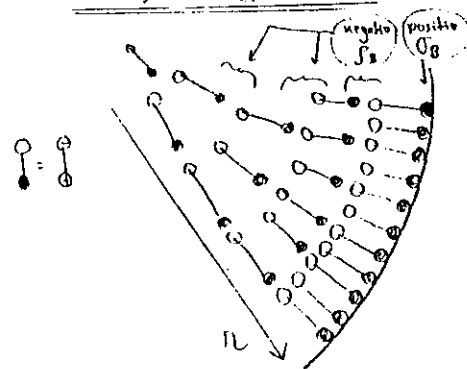
$$P = D - \epsilon_0 E = D - \epsilon_0 \cdot \frac{D}{\epsilon_r \epsilon_0} = (1 - \frac{1}{\epsilon_r}) D = \begin{cases} 0 & r > R_0 \\ (1 - \frac{1}{\epsilon_r}) \cdot \frac{\rho_0 r^2}{4 R_0^3} & r < R_0 \end{cases}$$

$$\text{Da är } \sigma_B(r) = |P(r)| = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \cdot \frac{\rho_0 R_0}{4} \quad (\text{positiv, för } \epsilon_r > 1)$$

c) I följande formen (eller utledning):

$$\rho_B(r) = -\nabla \cdot \vec{P} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \cdot (1 - \frac{1}{\epsilon_r}) \cdot \frac{\rho_0 r^2}{4 R_0^3}) = -(1 - \frac{1}{\epsilon_r}) \cdot \frac{\rho_0}{4 R_0^3} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot 4 r^3$$

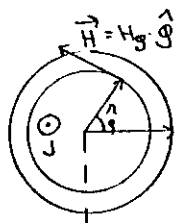
$$\Rightarrow \rho_B(r) = -\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \cdot \frac{\rho_0}{4} \cdot \frac{r}{R_0^3} \text{ för } r < R_0 \quad \text{Negativ}$$



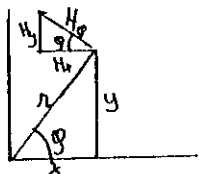
Polariseringar representeras
med el. dipoler. För $P(r) \neq 0$
och tillhörande dipoler
skapas från isärhållning

③

a)



Kartesiske koordinater:



Strømtetthet $J = \frac{I}{\pi R^2}$

Ampere lov.

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = I_{\text{inn}}$$

$$\oint H_\phi \cdot ds = \iint J \cdot dA \quad (\text{rotasjonssym.})$$

$$H_\phi \cdot 2\pi r = J \cdot \pi R^2$$

$$H_\phi(r) = J \cdot \frac{r}{2} = I \cdot \frac{r}{2\pi R^2}$$

$$\vec{H} = H_\phi \hat{\phi}$$

$$H_x = -H_\phi \sin \phi = -\left(J \cdot \frac{r}{2}\right) \left(\frac{y}{r}\right) = -J \cdot \frac{y}{2} = -\frac{I}{2\pi R^2} \cdot y$$

$$H_y = +H_\phi \cos \phi = \left(J \cdot \frac{r}{2}\right) \left(\frac{x}{r}\right) = J \cdot \frac{x}{2} = \frac{I}{2\pi R^2} \cdot x$$

b) I den gjenværende del av ledaren blir strømtettheten $J' = \frac{I}{\pi R^2 - \pi a^2}$.

Ved bruk av sup. ges. fremregnet er $\vec{H}$ sammensatt av felt $\vec{H}^{(a)}$ pga strøm $-J'$ i sylinder med radius a pluss $\vec{H}'$ pga strøm $+J'$ i sylinder med radius R (se figur). Vi beholder kun inni hulrom.

$$\vec{H}'(P) = \vec{H}(x, y) = [H_x^{(a)} + H_x', H_y^{(a)} + H_y']$$

Pkt P har koordinater: $\begin{cases} x = a + \rho \cdot \cos \phi \\ y = \rho \cdot \sin \phi \end{cases}$

Bruker resultatet i a)

$$H_x^{(a)} = -(-J') \cdot \frac{y}{2} = J' \cdot \frac{y}{2} \quad H_y^{(a)} = (-J') \cdot \frac{x-a}{2}$$

$$H_x' = -J' \cdot \frac{y}{2}$$

$$H_y' = J' \cdot \frac{x}{2}$$

Totalt:

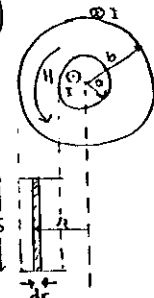
$$H_x = H_x^{(a)} + H_x' = 0$$

$$H_y = H_y^{(a)} + H_y' = J' \cdot \frac{a}{2} = I \cdot \frac{a}{2\pi(R^2 - a^2)}$$

3 av 4

④

a)



$\vec{H}$ og $\vec{B}$ er axialsymmetriske, retning mot klokke når I har retning utgjelt i figuren. Da er også fluxen Φ_m axialsymmetrisk i samme retning som $\vec{B}$. $dA = s \cdot dr$

$$\Phi_m = \iint \vec{B} \cdot d\vec{A} = s \cdot \int_a^b \mu_0 H(r) dr = s \mu_0 \int_a^b \frac{I}{2\pi r} dr$$

$$\Rightarrow \Phi_m = s \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot I \cdot \ln \frac{b}{a} \quad \left(\Phi_m' = \frac{\Phi_m}{s} = \frac{\mu_0}{2\pi} I \ln \frac{b}{a} \right)$$

Def: $\Phi_m = L \cdot I$ (eller $\mathcal{E} = -\dot{\Phi}_m = -L \cdot \dot{I}$) $\Rightarrow \underline{L' = \frac{\Phi_m'}{I} = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \ln \frac{b}{a}}$

b) $\underline{w} = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H} = \frac{1}{2} \mu_0 H^2 = \frac{1}{2} \mu_0 \left(\frac{I}{2\pi r}\right)^2 = \frac{\mu_0}{8\pi^2} I^2 \cdot \frac{1}{r^2}$

Total energi $W = \iiint w \cdot ds = s \cdot \int_a^b w \cdot 2\pi r \cdot dr = s \cdot \frac{\mu_0}{4\pi} I^2 \int_a^b \frac{1}{r} dr = s \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi} I^2 \ln \frac{b}{a}}_{W'}$

Dvs $\underline{W' = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I^2 \cdot \ln \frac{b}{a}}$

4 av 4