

**KONTINUASJONSEKSAMEN i
TFY4155 ELEKTROMAGNETISME og
FY1003 ELEKTRISITET OG MAGNETISME**

Eksamensdato: Fredag 20. august 2010

Eksamenstid: 09:00 - 13:00

Faglig kontakt under eksamen: Institutt for fysikk, Arne Mikkelsen, tlf. 7359 3433 / 486 05 392

Tillatte hjelpemidler (kode C):

Bestemt enkel godkjent kalkulator

Rottmann: Matematisk formelsamling (norsk eller tysk utgave)

C.Angell og B.E.Lian: Fysiske størrelser og enheter.

Vedlagt formelliste

Sensurdato: Seinst 10. sep. 2010

Prosenttallene i parentes etter hver oppgave angir hvor mye den i utgangspunktet vektlegges ved bedømmelsen.

I de fleste tilfeller er det fullt mulig å løse etterfølgende punkter selv om et punkt foran skulle være ubesvart.

Noen generelle merknader:

- Symboler er angitt i kursiv (f.eks. V for potensial), mens enheter angis uten kursiv (f.eks. V for volt)
- $\hat{i}$, $\hat{j}$ og $\hat{k}$ er enhetsvektorer i henholdsvis x -, y - og z -retning.
- Metall er synonymt med elektrisk leder. Isolator er synonymt med dielektrikum.
- Ved tallsvar kreves både tall og enhet.
- Dersom ikke annet er oppgitt
 - antas det at systemet er i elektrostatisk likevekt,
 - er “potensial” underforstått “elektrostatisk potensial” og tilsvarende for “potensiell energi”,
 - er nullpunkt for elektrostatisk potensial og potensiell energi valgt uendelig langt borte,
 - er Q , ρ og σ (uten indeks) fri ladning.

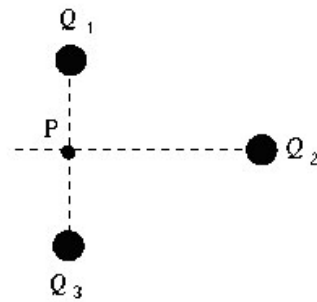
I flervalgsspørsmålene er kun ett av svarene rett. Du skal altså svare A, B, C, D eller E eller du kan svare blankt. **Rett svar gir 5 p, galt svar eller flere svar gir 0 p, blank (ubesvart) gir 1 p.**

Svar på flervalgsspørsmål skriver du på første innleveringsark i en tabell liknende dette:

[illegible]

Oppgave 1. Flervalgsspørsmål (teller 25%)

a) Tre positive og like ladninger $Q_1 = Q_2 = Q_3$ er plassert i hjørnene av en likebeint trekant som vist i figuren. Punktet P ligger på midtpunktet av linja mellom Q_1 og Q_3 . Det elektriske feltet ved P er



- A) null.
- B) Ikke null og har retning som fra P til Q_3 .
- C) Ikke null og har retning som fra P til Q_2 .
- D) Ikke null og har retning som fra Q_1 til Q_2 .
- E) Ingen av disse er rett.

b) En parallellplatekondensator har luft mellom platene og er ladd opp til 500 V med spenningsforsyningen frakopla. Et plastmateriale med relativ permittivitet 5,0 føres inn mellom platene og fyller det meste av rommet. Energien på kondensatorplatene vil da

- A) øke
- B) avta
- C) ikke endres
- D) bli null
- E) opplysninger mangler for å kunne svare på spørsmålet

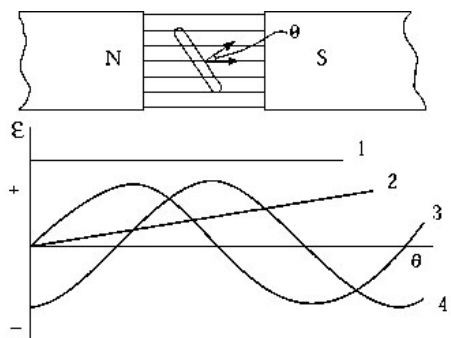
c) Hvis et dielektrisk materiale blir satt inn mellom platene i en parallellplatekondensator når den er forbundet til en spenningsforsyning på 100 V, vil

- A) spenningen over kondensatoren avta
- B) elektrisk felt mellom platene avta
- C) elektrisk felt mellom platene øke
- D) ladningen på kondensatoren avta
- E) ladningen på kondensatoren øke

d) Ei kompassnål befinner seg i et homogent magnetisk felt med dens sydpol pekende i positiv retning av $\vec{B}$. Nettokraften på kompassnåla

- A) virker i samme retningen som $\vec{B}$.
- B) virker i retning rett vinkel med $\vec{B}$.
- C) virker i retning rett vinkel med planet gjennom $\vec{B}$ og kompassnåla.
- D) virker i motsatt retning av $\vec{B}$.
- E) er lik null.

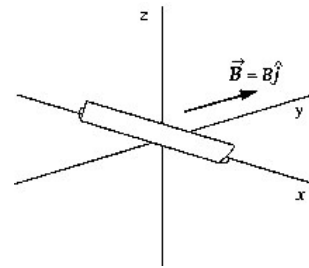
e) En enkel generator består av en rektangulær strømsløyfe som roterer i retning mot klokka mellom to magnetiske poler som vist i figuren. Vinkelen mellom magnetfeltet og normalen til strømsløyfa er θ . Grafen viser ulike kurver for ems'en $\mathcal{E}$ som funksjon av θ med $\theta = 0$ i origo. Hvilken av kurvene representerer $\mathcal{E}$ riktig?



- A) 1
- B) 2
- C) 3
- D) 4
- E) Ingen av kurvene

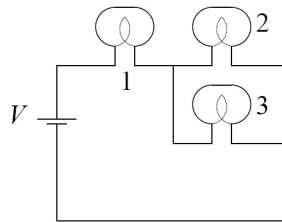
f) En ledningsbit er plassert i et område med uniformt magnetfelt i y -retningen, som vist i figuren. Ledningen har retning langs x -aksen. Du observerer at det er *ingen* indusert ems i ledningen når den beveges. Du kan da konkludere med at ledningen må bevege seg i

- A) $\pm z$ -retning
- B) $\pm x$ -retning
- C) $\pm y$ -retning
- D) enhver retning som danner en vinkel forskjellig fra null med x -retningen
- E) umulig, ledningen beveger seg ikke



g) Tre identiske lyspærer, hver med motstand R er koplet til et batteri med elektromotorisk spenning V . Vi antar at pærenes motstand R ikke avhenger av strømmen gjennom dem og at de tåler store strømmer. Hva skjer med lysstyrken i pære nummer 3 hvis vi skrur ut pære nummer 2?

- A) Pære nr. 3 slokker.
- B) Pære nr. 3 lyser svakere.
- C) Pære nr. 3 lyser like sterkt som før.
- D) Pære nr. 3 lyser sterkere.
- E) Pære nr. 3 vil eksplodere.



h) Et elektron med masse m_e og ladning $-e$ befinner seg i et uniformt magnetfelt $\vec{B} = B_0 \hat{k}$. Ved tidspunktet $t = 0$ har elektronet hastighet $\vec{v} = v_0 \hat{i} + v_0 \hat{j}$. Hva slags bevegelse får elektronet?

- A Sirkelbevegelse med radius $m_e v_0 / e B_0$
- B Sirkelbevegelse med radius $\sqrt{2} m_e v_0 / e B_0$
- C Sirkelbevegelse med radius $\sqrt{2} e B_0 / m_e$
- D Sirkelbevegelse med radius $\sqrt{2} m_e / e B_0$
- E Sirkelbevegelse med radius $e B_0 / m_e$

i) Maxwell generaliserte Amperes lov slik at den inkluderer forskyvningsstrøm, og loven lyder da

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \Phi_E}{\partial t}.$$

I denne likningen er forskyvningsstrømmen definert

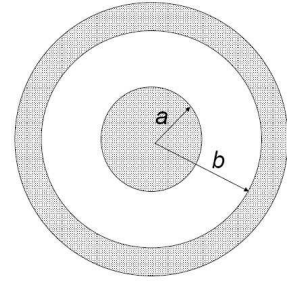
- A) $I + \epsilon_0 \frac{\partial \Phi_E}{\partial t}$
- B) I
- C) $\epsilon_0 \int \left(\frac{\partial \Phi_E}{\partial t} \right) dt$
- D) $\epsilon_0 \frac{\partial \Phi_E}{\partial t}$
- E) $\epsilon_0 \Phi_E$

j) Potensialet i et område er $V(y) = k V_0 y$, der k og V_0 er konstanter. Hvor mye potensiell elektrisk energi U befinner seg da i volumet avgrenset av $0 \leq x \leq \pi/k$, $0 \leq y \leq \pi/k$, $0 \leq z \leq \pi/k$?

- A) $U = \epsilon_0 V_0^2 \pi^3 / 2k$
- B) $U = \epsilon_0 V_0^2 \pi^3 / 4k$
- C) $U = \epsilon_0 V_0^2 \pi^3 / k$
- D) $U = \epsilon_0 V_0^2 \pi^4 / k^2$
- E) $U = \epsilon_0 V_0^2 \pi^4 / 6k$

Oppgave 2. Elektrostatikk (teller 25%)

En sylinderkondensator (koaksialkabel) består av en innerleder med radius a og en ytterleder med indre radius b , som vist i figuren. Tykkelsen av ytterlederen har ingen betydning. Lengden (ℓ) av kondensatoren er så stor at vi kan se bort fra effekter nær endene. Innerlederen har elektrisk ladning per lengdeenhet lik $+\lambda$ og ytterlederen ladning $-\lambda$. Volumet mellom lederne har permittivitet ϵ_0 og er i oppgavens del a) - c) ladningsfritt.



a) Vis at den elektriske feltstyrken $\vec{E}(r)$ kan uttrykkes

$$\vec{E}(r) = \vec{E}_0/r$$

der konstanten $\vec{E}_0$ kan ha ulike verdier for ulike deler av rommet. Finn $\vec{E}_0$ for alle deler av rommet (alle r).

b) Ytterlederen har potensial $V(b) = 0$. Finn potensialet $V(a)$ for innerlederen. Oppgitt at $\lambda > 0$, er $V(a)$ positiv eller negativ?

c) Finn den lagrede elektrostatiske energien W' per lengdeenhet.

Volumet mellom lederne fra a til b fylles nå med en romladning $\rho(r)$, slik at potensialet mellom lederne ikke lenger er som ovenfor, men gitt av:

$$V(r) = V_0 \frac{b-r}{b-a}.$$

Potensialet varierer altså lineært fra $V(a) = V_0$ til $V(b) = 0$. Mellomrommet fra a til b har fortsatt permeabilitet ϵ_0 . Ladning per lengdeenhet på ytterleder og innerleder er nå ikke gitt (og du trenger heller ikke bestemme disse).

d) Finn uttrykk for den elektriske feltstyrken $E(r)$ mellom lederne og finn romladningen $\rho(r)$.

Oppgave 3. Magnetisme (teller 25%)

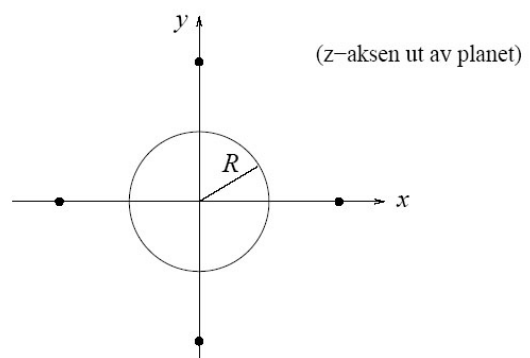
En tilnærmet uendelig lang og rett sylindrerformet leder med radius R fører en elektrisk strøm som ikke varierer med tida. Strømtettheten (strøm per flateenhet) i lederen avtar lineært med avstanden r fra lederens senterakse:

$$\vec{J}(r) = J_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right) \hat{\mathbf{k}}.$$

Vi har valgt koordinatsystem slik at lederens senterakse sammenfaller med z -aksen, og slik at strømmen går i positiv z -retning.

a) Finn total strøm I_0 i lederen uttrykt med bl.a. J_0 .

Figuren til høyre er et snitt gjennom lederen i xy -planet, slik at strømmen I kommer opp av planet.



b) Tegn vektorer som illustrerer magnetfeltet $\vec{B}$ i de fire angitte punktene i avstand $2R$ fra senteraksen på henholdsvis positiv og negativ x - og y -akse.

c) Bruk Amperes lov til å finne magnetfeltet $B_u(r)$ utenfor den strømførende lederen ($r > R$), uttrykt med bl.a. J_0 og R .

(Oppg. 3 forts....)

d) Magnetfeltet inni den strømførende lederen ($r < R$) er oppgitt til å være

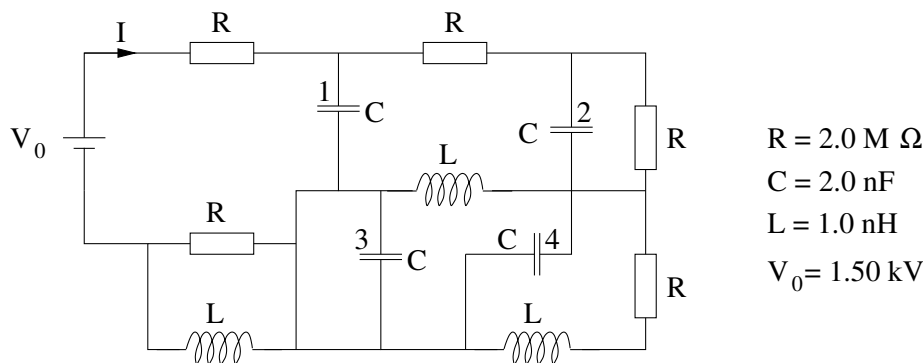
$$B_i(r) = C_1 \cdot r + C_2 \cdot r^2.$$

Bruk Amperes lov til å bestemme konstantene C_1 og C_2 . Finn også tallverdier (med enhet) når $J_0 = 5,00 \cdot 10^4 \text{ A/m}^2$ og $R = 1,00 \text{ cm}$.

Oppgave 4. Kretser (teller 15%)

a) Kretsen nedenfor består av fem motstander R , fire kapasitanser C og tre induktanser L . Likespenningskilden V_0 har vært tilkoblet i så lang tid at strømmer i kretsen og ladninger på kondensatorene ikke lenger endrer seg.

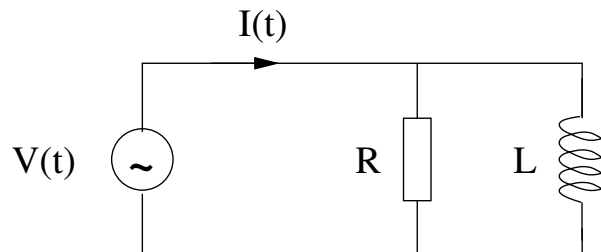
Bestem strømmen I , samt ladningene Q_1 , Q_2 , Q_3 og Q_4 på kondensatorene merket henholdsvis 1, 2, 3 og 4.



b) I kretsen til høyre er en vekselspenningskilde $V(t) = V_0 \cos \omega t$ koblet til en parallellkobling av en motstand R og en induktans L . Vi antar at spenningskilden har vært tilkoblet så lenge at strømmen $I(t)$ svinger med samme vinkel-frekvens som den påtrykte spenningen.

Skriv spenningen $V(t)$ og strømmen i kretsen $I(t)$ på kompleks form:

$$V(t) = V_0 e^{i\omega t} \quad I(t) = I_0 e^{i\omega t}$$



der spenningsamplituden V_0 er reell mens strøamplituden I_0 er kompleks. Bruk Kirchhoffs regler til å bestemme den komplekse strøamplituden $I_0(\omega)$. Hva er faseforskyvningen mellom strøm og spenning?

Oppgave 5. Induksjon (teller 10%)

En plan, rektangulær ledersløyfe med sidekanter a og $2a$ ligger med venstre kant parallell med en rett leder i avstand R , som vist i figuren til høyre. Lederen er lang og tynn og fører en tidsavhengig strøm

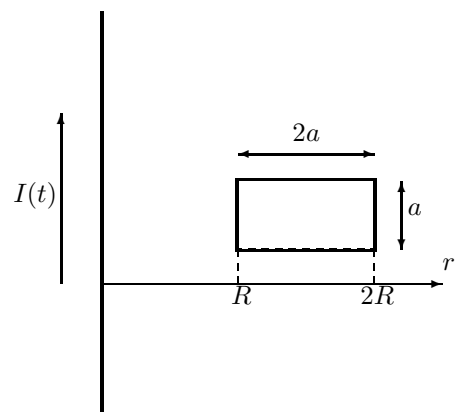
$$I(t) = I_0 \cos \omega t.$$

Bruk Faradays induksjonslov til å finne uttrykk for den elektromotoriske spenningen $\mathcal{E}(t)$ som induseres i den rektangulære ledersløyfa som følger av strømmen $I(t)$ i den rette lederen.

Oppgitt: Magnetfelt rundt lederen er

$$B(r, t) = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I(t)}{r}$$

der r er avstanden fra lederens senterakse.



FORMELLISTE.

Formlenes gyldighetsområde og de ulike symbolenes betydning antas å være kjent. Symbolbruk som i forelesningene.

(Q, ρ og σ uten indeks viser til *frie* ladninger. Q_i, ρ_i og σ_i er induert ladning)

$$\text{Coulombs lov: } \vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

$$\text{Gauss' lov integralform: } \oint \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q \quad \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = Q/\epsilon \quad \oint \vec{P} \cdot d\vec{A} = -Q_i \quad \oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

$$\text{Gauss' lov differensialform: } \operatorname{div} \vec{D} = \rho \quad \operatorname{div} \vec{E} = \rho/\epsilon \quad \operatorname{div} \vec{P} = -\rho_i \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$\text{Fluks: } \Phi_E = \iint \vec{E} \cdot d\vec{A} \quad \Phi = \iint \vec{D} \cdot d\vec{A} = \epsilon \Phi_E \quad \Phi_B = \iint \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

$$\text{Amperes lov: } \oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu \left(I_c + \epsilon \frac{\partial \Phi_E}{\partial t} \right) \quad \oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = I_c + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad \operatorname{curl} \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\text{Faradays lov: } \mathcal{E} = -\frac{\partial \Phi_B}{\partial t} = -L \frac{dI}{dt} \quad \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{\partial \Phi_B}{\partial t} \quad \operatorname{curl} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{Maxwells likninger: } \operatorname{div} \vec{D} = \rho \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad \operatorname{curl} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \operatorname{curl} \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\text{Elektrisk dipolmoment: } \vec{p} = q\vec{d} \quad (\text{fra} - \text{til} +) \quad \text{Polarisering: } \vec{P} = \frac{\sum \vec{p}}{V}$$

$$\text{Magnetisk (dipol)moment: } \vec{\mu} = I\vec{A} \quad \text{Magnetisering: } \vec{M} = \frac{\sum \vec{\mu}}{V}$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon \vec{E} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E} \quad \vec{P} = \chi_e \epsilon_0 \vec{E} \quad \epsilon_r = 1 + \chi_e$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M} = \mu \vec{H} = \mu_r \mu_0 \vec{H} \quad \vec{M} = \chi_m \vec{H} \quad \mu_r = 1 + \chi_m$$

$$\text{Elektrisk potensial: } V_a - V_b = - \int_b^a \vec{E} \cdot d\vec{s}, \quad \vec{E} = -\vec{\nabla} V,$$

$$\text{Energi og energitetthet: } U = \frac{1}{2} \iiint V dq \quad \text{Elektrisk: } u = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E} \quad \text{Magnetisk: } u = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H}$$

$$\text{Kondensatorer: } C = \frac{Q}{V} \quad \text{Kulekondensator: } C = 4\pi\epsilon_0 R \quad \text{Energi: } U = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} CV^2$$

$$\text{Platekondensator: } C = \epsilon \frac{A}{d} \quad \text{Parallellkopling: } C = \sum_i C_i \quad \text{Seriekopling: } \frac{1}{C} = \sum_i \frac{1}{C_i}$$

$$\text{Kraft på strømførende leder: } d\vec{F} = I d\vec{s} \times \vec{B} \quad \text{Lorentzkrafta: } \vec{F} = q \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right)$$

$$\text{Biot-Savarts lov: } \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q \vec{v} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{s} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

$$H\text{-felt rundt } \infty \text{ lang leder: } H_\theta = \frac{I}{2\pi r} \quad H\text{-felt i lang, tynn solenoide: } H = I \cdot n = I \cdot \frac{N}{\ell}$$

$$\text{Ohms lov: } V = RI, \quad \sigma \vec{E} = \vec{J} \quad \text{Strømtetthet: } \vec{J} = nq\vec{v}_d \quad \text{der } \vec{v}_d = \mu \vec{E} = \text{driftsfart.}$$

$$\text{Spoler: } L = N \frac{\Phi_B}{I} \quad U = \frac{1}{2} LI^2$$

Lenz lov: En induert strøm er alltid slik at den forsøker å motvirke forandringen i den magnetiske fluks som er årsak til strømmen.

Nablaoperatoren:

Kartesiske koordinater (x, y, z) , med enhetsvektorer henholdsvis $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}$ og $\hat{\mathbf{k}}$:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} V &= \vec{\nabla} V = \hat{\mathbf{i}} \frac{\partial V}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}} \frac{\partial V}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}} \frac{\partial V}{\partial z} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \\ \vec{\nabla}^2 V &= \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \\ \text{curl } \vec{D} = \vec{\nabla} \times \vec{D} &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ D_x & D_y & D_z \end{vmatrix}\end{aligned}$$

Sylinderkoordinater (r, ϕ, z) , med enhetsvektorer henholdsvis $\hat{\mathbf{r}}, \hat{\phi}$ og $\hat{\mathbf{k}}$:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} V &= \hat{\mathbf{r}} \frac{\partial V}{\partial r} + \hat{\phi} \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \phi} + \hat{\mathbf{k}} \frac{\partial V}{\partial z} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r D_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial D_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \\ \vec{\nabla}^2 V &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\end{aligned}$$

Kulekoordinater (r, θ, ϕ) , med enhetsvektorer henholdsvis $\hat{\mathbf{r}}, \hat{\theta}, \hat{\phi}$:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} V &= \hat{\mathbf{r}} \frac{\partial V}{\partial r} + \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} + \hat{\phi} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 D_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (D_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial D_\phi}{\partial \phi} \\ \vec{\nabla}^2 V &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}\end{aligned}$$

Divergensteoremet og Stokes' teorem for et tilfeldig vektorfelt $\vec{F}$:

$$\begin{aligned}\oint \vec{F} \cdot d\vec{A} &= \iiint \vec{\nabla} \cdot \vec{F} \, d\tau \\ \oint \vec{F} \cdot d\vec{s} &= \iint (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{A}\end{aligned}$$

Infinitesimale volumelement:

$$\begin{aligned}d\tau &= dx \, dy \, dz \\ d\tau &= r^2 \, dr \, \sin \theta \, d\theta \, d\phi \xrightarrow{\text{kulesymmetri}} 4\pi r^2 \, dr \\ d\tau &= r \, dr \, d\phi \, dz \xrightarrow{\text{syl.symmetri}} 2\pi r \, dr \, \ell\end{aligned}$$