Institutt for fysikk

Eksamensoppgave i

TFY4155 ELEKTRISITET OG MAGNETISME
FY1003 ELEKTRISITET OG MAGNETISME

Faglig kontakt under eksamen: Institutt for fysikk v/Arne Mikkelsen,
Tlf.: 486 05 392 / 7359 3433

Eksamensdato: Torsdag 30. mai 2013
Eksamenstid: 09:00 - 13:00
Tillatte hjelpemidler (kode C):

Bestemt enkel godkjent kalkulator.
Rottmann: Matematisk formelsamling (norsk eller tysk utgave).
C. Angell og B. E. Lian: Fysiske størrelser og enheter.
Vedlagt formelark.

Annen informasjon:

1. Denne eksamen teller 90 % på endelig karakter, laboratorierapport 10 %. For studenter med laboratorium godkjent 2012 og før teller denne eksamen 100 %.

2. Prosenttallene i parantes etter hver oppgave angir hvor mye den i utgangspunktet vektlegges ved bedømmelsen.

3. Noen generelle faglige merknader:
   - Symboler er angitt i kursiv (f.eks. V for potensial), mens enheter angis uten kursiv (f.eks. V for volt)
   - $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ og $\hat{\mathbf{k}}$ er enhetsvektorer i henholdsvis x-, y- og z-retning.
   - Ved tallsvar kreves både tall og enhet.

4. I flervalgsspørsmålene er kun ett av svarene rett. Du skal altså svare A, B, C, D eller E (stor bokstav) eller du kan svare blankt. **Rett svar gir 5 p, galt svar eller flere svar gir 0 p, blank (ubesvart) gir 1 p.**
Svar på flervalgsspørsmål i Oppgave 1 skriver du på første innleveringsark i en tabell liknende den følgende:

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l
Mitt svar:												

5. Oppgavene er utarbeidet av Arne Mikkelsen og vurdert av Jon Andreas Støvneng.

Målform/språk: Bokmål.

Antall sider (uten denne framsida): 5.

Antall sider vedlegg: 2.

Kontrollert av:

Dato Sign

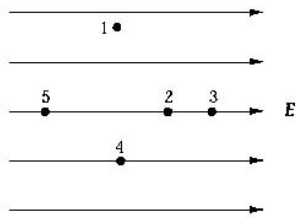
Merk! Studenter finner sensur i Studentweb. Har du spørsmål om din sensur må du kontakte instituttet ditt. Eksamenskontoret vil ikke kunne svare på slike spørsmål.

Oppgave 1. Flervalgsspørsmål (teller 30 %)

a) Det elektriske potensialet i en del av rommet er gitt ved $V(x, y, z) = (10\,\mathrm{V/m})x + (20\,\mathrm{V/m})y + (30\,\mathrm{V/m})z$. Absoluttverdien til den elektriske feltvektor i dette området er

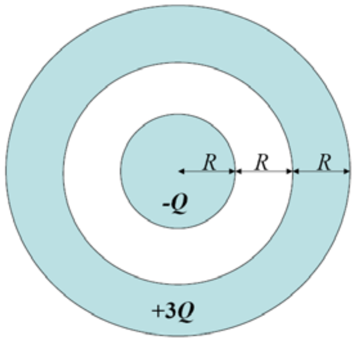
A) 60 V/m
B) 37 V/m
C) 10 V/m
D) 20 V/m
E) 1400 V/m

b) Hvilket punkt i diagrammet er på det høyeste potensialet?



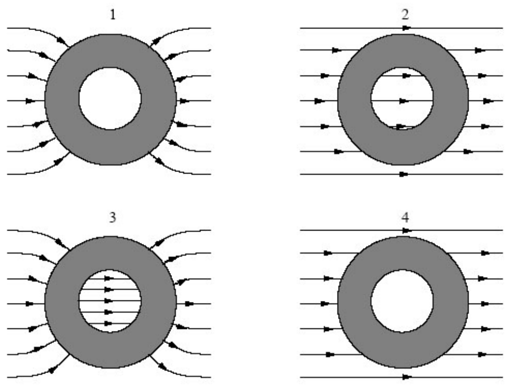
A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5

c) Ei metallkule med radius R og (negativ) ladning $-Q$ er omgitt av et vakuumsjikt med tykkelse R fulgt av et metallisk kuleskall med tykkelse R og ladning $3Q$. Hvor mye ladning befinner seg på kuleskallets ytre overflate?



A) 0
B) $-Q$
C) Q
D) $2Q$
E) $3Q$

d) Ei nøytral metallkule har et kuleformet hulrom i sentrum. Kula er plassert i det elektriske feltet mellom to tilnærmet uendelig store metallplater (ikke vist i figuren) med ladning henholdsvis $+\sigma$ og $-\sigma$ per flateenhet. Hvilken figur angir korrekt feltlinjene for det resulterende (totale) feltet i området inni og omkring kula?



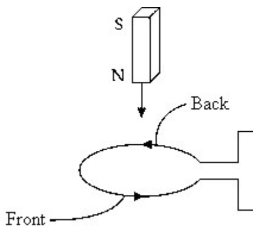
A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) Ingen av figurene

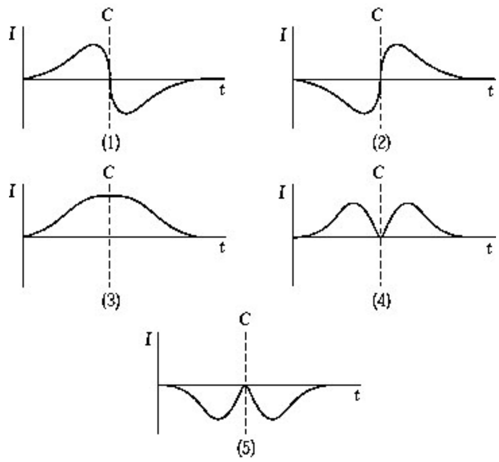
e) SI-enheten til magnetisk flukstetthet er tesla, som er ekvivalent med

A) $\dfrac{\mathrm{N \cdot s}}{\mathrm{C \cdot m}}$ B) $\dfrac{\mathrm{N \cdot C}}{\mathrm{s \cdot m}}$ C) $\dfrac{\mathrm{N \cdot m}}{\mathrm{s^2}}$ D) $\dfrac{\mathrm{C}}{\mathrm{A \cdot s}}$ E) $\mathrm{Wb\,m^2}$

f) En stavmagnet slippes gjennom ei strømsløyfe som vist i venstre del av figuren under. Pilene i sløyfa viser valgt positiv strømretning. Husk at magnetiske feltlinjer går ut fra nordpol og inn mot sørpol på en magnet. Strømmen I som funksjon av tida t når magneten faller gjennom sløyfa er illustrert kvalitativt med hvilken graf? (Tidspunktet som midtpunktet av magneten passerer sløyfa er vist med linja C.)

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5

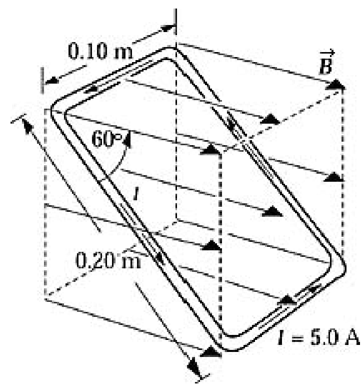




g) Alle ladde partikler som passerer gjennom et krysset elektrisk og magnetisk felt uten å bli avbøyd har samme

A) masse
B) fart
C) bevegelsesmengde
D) energi
E) ladning-til-masse-forhold

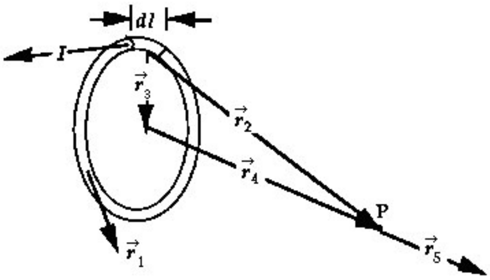
h) Ei rektangulær strømsløyfe $(0,10\,\mathrm{m} \times 0,20\,\mathrm{m})$ fører en strøm på 5,00 A i retning mot klokka. Sløyfa er orientert som vist i figuren i et uniformt magnetisk felt på $B = 1{,}50$ T. Sløyfas magnetiske dipolmoment er lik



A) $0,026\,\mathrm{A\,m^2}$
B) $0,030\,\mathrm{A\,m^2}$
C) $0,10\,\mathrm{A\,m^2}$
D) $0,50\,\mathrm{A\,m^2}$
E) $1,5\,\mathrm{A\,m^2}$

i) Hvis Biot-Savarts lov $\mathrm{d}\vec{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{I\mathrm{d}\vec{\ell} \times \vec{r}}{r^3}$ blir brukt til å bestemme magnetfeltet ved punktet P på aksen til ei sirkulær strømsløyfe, så er vektoren $\vec{r}$ representert ved

A) $\vec{r}_1$
B) $\vec{r}_2$
C) $\vec{r}_3$
D) $\vec{r}_4$
E) $\vec{r}_5$

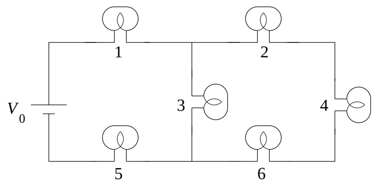


j) Når det føres et materiale inn i det indre av en solenoide som fører en konstant strøm, måles magnetisk flukstetthet B til å falle med 0,005 %. Da er den magnetiske susceptibiliteten til materialet lik

A) $-5 \cdot 10^{-5}$
B) $+5 \cdot 10^{-5}$
C) $1,00005$
D) $0,99995$
E) Mer informasjon trengs for å gi svar

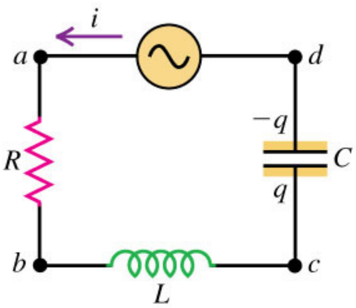
k) Hver av de seks lyspærene i figuren nedenfor kan betraktes som en ideell ohmsk motstand R. Økt spenning over ei lyspære (og dermed økt strømstyrke) gir økt lysstyrke i lyspæra. Hva skjer med lysstyrken i pære 1 dersom pære 3 skrus ut?

A) Uendra
B) Lyser svakere
C) Lyser sterkere
D) Slokker
E) Eksploderer



l) Kretsen i figuren består av en vekselspenningskilde (AC) og en seriekopling av en resistor, induktans og en kondensator med endelige verdier. Når kildens frekvens er lik kretsens resonansfrekvens, er kretsens impedans

A) maksimum
B) minimum, men ikke null
C) null
D) hverken maksimum eller minimum
E) det er ikke nok informasjon til entydig svar.



Oppgave 2. Metallkuler (teller 15 %)

Ei metallkule med radius R_1 er tilført en netto ladning Q. Kula har potensial

$$V_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_1}.$$

a) Finn uttrykk for kulas elektrostatiske energi U_1.

Kule 1 forbindes så med ei kule nr. 2 med en lang, tynn ledertråd med en viss ohmsk motstand. Kule 2 har radius R_2 og er før tilkoplingen ladningsfri. Du kan anta at kulene er så langt fra hverandre at ladningsfordelingen på den ene kula ikke påvirkes av ladningen på den andre kula og at den gjensidige elektrostatiske energien mellom kulene er neglisjerbar. Du kan også se bort fra ladning i ledertråden før og etter sammenkoplingen.

b) Hvordan fordeler ladningen Q seg med Q_1 og Q_2 på henholdsvis kule 1 og 2, og hva blir potensialet V_1' og V_2' på henholdsvis kule 1 og på kule 2 etter sammenkoplingen?

c) Ved overføring av ladning fra kule 1 til 2 tapes elektrostatisk energi. Hvor stor brøkdel x av den opprinnelige elektrostatiske energien U_1 tapes, og hvor blir det av denne energien?

Oppgave 3. Elektrostatikk (teller 12 %)

Ei kule med radius a av dielektrisk materiale med permittivitet $\epsilon = 2\epsilon_0$ er ladd slik at ladningen i et kulevolum innenfor radius r er gitt ved

$$Q(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_0 \left(1 - \frac{r}{a}\right).$$

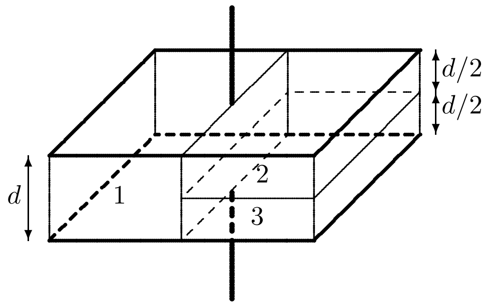
Utenfor kula ($r > a$) er rommet ladningsfritt og permittiviteten er ϵ_0.

a) Finn uttrykk for det elektriske feltet $\vec{E}(r)$ for alle verdier av r inni og utenfor kula.

b) Finn uttrykk for ladningstettheten $\rho(r)$ inni kula.

Oppgave 4. Kondensator (teller 16 %)

Figuren viser en parallellplatekondensator med rektangulære plater med areal $A = 10,00\,\text{cm}^2$ og plateavstand $d = 2,00$ mm. Rommet mellom platene består av tre ulike dielektriske materialer med relativ permittivitet henholdsvis $\epsilon_1 = 4{,}90$, $\epsilon_2 = 5{,}60$ og $\epsilon_3 = 2{,}10$. Alle de tre materialene er like brede (dvs. har hver areal $A/2$) og materialene 2 og 3 er halvparten så tykke som materiale 1. Figuren viser også litt av tilførselsledningene.



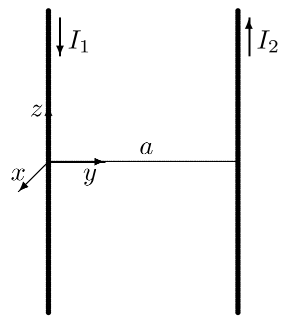
Platenes dimensjoner og avstanden mellom dem er slik at du kan se bort fra eventuelle randeffekter.

a) Finn kondensatorens kapasitans.

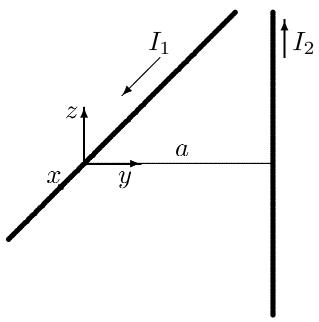
b) Beregn det elektriske feltet i materiale 3 når potensialforskjellen mellom platene er $V = 200$ V.

Oppgave 5. Magnetisk kraft (teller 11 %)

To uendelig lange, rette og tynne ledere ligger parallelt med hverandre i z-retning, har avstand a og fører strøm I_1 og I_2 i motsatt retning, vist i figuren til høyre. Koordinatsystemet i figuren har origo på I_1-ledningen.



a) Finn et uttrykk for kraft F' per lengdeenhet som virker på ledningen med strøm I_2. Angi også retningen på krafta.



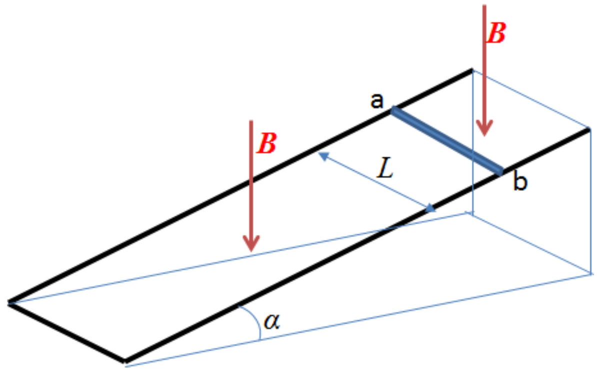
Ledningen med strøm I_1 vippes nå 90° slik at den faller langs x-aksen og med ledningene normalt på hverandre med a som korteste avstand, se figuren til venstre. Strømmen I_1 går i x-retningen og strømmen I_2 går i z-retningen.

b) Finn uttrykk for kraft $F'(z)$ per lengdeenhet som virker på ledningen med strøm I_2, som funksjon av koordinaten z. Vis også retningen på $F'(z)$ for ulike verdier av z.

Oppgave 6. Induksjon (teller 10 %)

En metallstav med lengde L og masse m er plassert på to parallelle metallskinner som danner en vinkel α med horisontalen som vist i figuren. Avstanden mellom skinnene er L, og staven danner 90° med skinnene. Staven og skinnene (med ei tverrskinne i bunnen) danner en strømkrets. Staven har total elektrisk resistans R mens skinnene har neglisjerbar resistans.

Et uniformt magnetisk felt B er retta vertikalt nedover som vist i figuren. Staven slippes med null fart og glir så nedover skinnene. Du kan anta denne bevegelsen foregår uten mekanisk friksjon mellom stav og skinner. Spørsmålene nedenfor gjelder når staven etter en kort tid glir med konstant fart v.



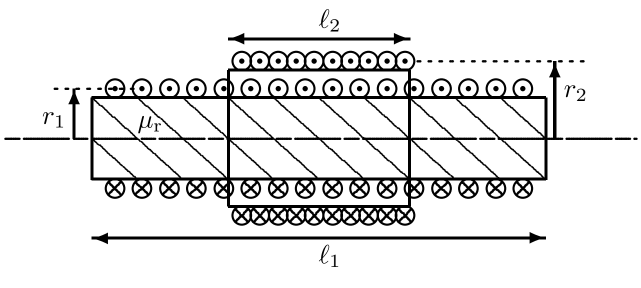
a) Har strømmen som induseres i staven retning fra a til b eller fra b til a? Svaret må begrunnes.

b) Finn uttrykk for den induserte strømmen I i staven. Uttrykk svaret bl.a. med v.

c) Finn uttrykk for den konstante farten v til staven. Uttrykk svaret med oppgitte størrelser samt tyngdens akselerasjon, g.

Oppgave 7. Gjensidig induktans (teller 6 %)

En lang, tynn solenoide 1 har radius $r_1 = 1{,}00$ cm, lengde $\ell_1 = 10{,}0$ cm og $N_1 = 500$ viklinger jamt fordelt. En annen solenoide 2 med radius $r_2 = 1{,}50$ cm, lengde $\ell_2 = 4{,}00$ cm og og $N_2 = 300$ viklinger er lagt utenpå solenoide 1 med felles senterakse. Figuren viser et lengdesnitt gjennom solenoidene, men ikke med riktige viklingstall. Indre solenoide er fylt med jern med relativ permeabilitet $\mu_r = 2400$, ellers er permeabiliteten μ_0. Du kan anta at produsert magnetfelt utenfor en lang, tynn solenoide er lik null.



Hva er den gjensidige induktansen mellom solenoidene?

Vedlegg: FORMELLISTE.

Formlenes gyldighetsområde og de ulike symbolenes betydning antas å være kjent. Symbolbruk som i forelesningene.

Q, ρ og σ uten indeks viser til *frie* ladninger. Q_i, ρ_i og σ_i er indusert ladning.
I og $\vec{J}$ uten indeks er ledningsstrøm (conducting current), I_d og $\vec{J}_\mathrm{d}$ er forskyvningsstrøm (displacement current).

Coulombs lov: $\vec{F}_{12} = \dfrac{1}{4\pi\epsilon}\dfrac{q_1 q_2}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}}_{12} \qquad \vec{E} = \dfrac{1}{4\pi\epsilon}\dfrac{q}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}}$

Gauss' lov integralform: $\oiint \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = Q \qquad \oiint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = Q/\epsilon \qquad \oiint \vec{P}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = -Q_\mathrm{i} \qquad \oiint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = 0$

Gauss' lov differensialform: $\mathrm{div}\vec{D} = \rho \qquad \mathrm{div}\vec{E} = \rho/\epsilon \qquad \mathrm{div}\,\vec{P} = -\rho_\mathrm{i} \qquad \mathrm{div}\vec{B} = 0$

Fluks: $\Phi_E = \iint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A} \qquad \Phi = \iint \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = \epsilon\,\Phi_E \qquad \Phi_B = \iint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{A}$

Amperes lov: $\oint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = \mu\left(I + \epsilon\dfrac{\partial \Phi_E}{\partial t}\right) \qquad \oint \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = I + \dfrac{\partial \Phi}{\partial t} \qquad \mathrm{curl}\,\vec{H} = \vec{J} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

Faradays lov: $\mathcal{E} = -\dfrac{\partial \Phi_B}{\partial t} = -L\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \qquad \oint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = -\dfrac{\partial \Phi_B}{\partial t} \qquad \mathrm{curl}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

Maxwells likninger: $\mathrm{div}\vec{D} = \rho \qquad \mathrm{div}\vec{B} = 0 \qquad \mathrm{curl}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \mathrm{curl}\,\vec{H} = \vec{J} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

Forskyvningsstrøm: $I_\mathrm{d} = \dfrac{\partial \Phi}{\partial t}\,, \quad \vec{J}_\mathrm{d} = \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

Elektrisk dipolmoment: $\vec{p} = q\vec{d}$ (fra − til +) Polarisering: $\vec{P} = \dfrac{\sum \vec{p}}{\text{volum}}$

Magnetisk (dipol)moment: $\vec{\mu} = \vec{m} = I\vec{A}$ Magnetisering: $\vec{M} = \dfrac{\sum \vec{\mu}}{\text{volum}}$

$\vec{D} = \epsilon_0\vec{E} + \vec{P} = \epsilon\vec{E} = \epsilon_\mathrm{r}\epsilon_0\vec{E} \qquad \vec{P} = \chi_\mathrm{e}\epsilon_0\vec{E} \qquad \epsilon_\mathrm{r} = 1 + \chi_\mathrm{e}$

$\vec{B} = \mu_0\vec{H} + \mu_0\vec{M} = \mu\vec{H} = \mu_\mathrm{r}\mu_0\vec{H} \qquad \vec{M} = \chi_\mathrm{m}\vec{H} \qquad \mu_\mathrm{r} = 1 + \chi_\mathrm{m}$

Elektrisk potensial: $V_a - V_b = -\displaystyle\int_b^a \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{s}\,, \qquad \vec{E} = -\vec{\nabla}V\,,$ Relativt ∞: $V(r) = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\epsilon r}$

Energi og energitetthet: $U = \dfrac{1}{2}\displaystyle\iiint V\mathrm{d}q$ Elektrisk: $u = \dfrac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}$ Magnetisk: $u = \dfrac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}$

Kondensatorer: $C = \dfrac{Q}{V}$ Kulekondensator: $C = 4\pi\epsilon_0 R$ Energi: $U = \dfrac{1}{2}QV = \dfrac{1}{2}CV^2$

Platekondensator: $C = \epsilon\dfrac{A}{d}$ Parallellkopling: $C = \displaystyle\sum_i C_i$ Seriekopling: $\dfrac{1}{C} = \displaystyle\sum_i \frac{1}{C_i}$

Kraft på strømførende leder: $\mathrm{d}\vec{F} = I\mathrm{d}\vec{s}\times\vec{B}$ Lorentzkrafta: $\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}\right)$

Biot-Savarts lov: $\vec{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{q\,\vec{v}\times\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \qquad \mathrm{d}\vec{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{I\mathrm{d}\vec{s}\times\hat{\mathbf{r}}}{r^2}$

H-felt rundt ∞ lang leder: $H_\theta = \dfrac{I}{2\pi r}$ H-felt i lang, tynn solenoide: $H = I\cdot n = I\cdot\dfrac{N}{\ell}$

Ohms lov: $V = RI\,,\quad R = \rho\dfrac{\ell}{A} = \dfrac{1}{\sigma}\dfrac{\ell}{A}\,;\quad P = VI$

$\sigma\vec{E} = \vec{J}$, der strømtetthet $= \vec{J} = nq\vec{v}_{\rm d}$ og $\vec{v}_{\rm d} = \mu\vec{E}$ = driftsfart.

Induktans: $\mathcal{E} = -L\dfrac{{\rm d}I}{{\rm d}t}\qquad \mathcal{E}_2 = -M_{21}\dfrac{{\rm d}I_1}{{\rm d}t},\quad M_{21} = M_{12}$ Spoler: $L = N\dfrac{\Phi_B}{I}\qquad U = \dfrac{1}{2}LI^2$

Lenz lov: En indusert strøm er alltid slik at den forsøker å motvirke forandringen i den magnetiske fluksen som er årsak til strømmen.

Nablaoperatoren:

Kartesiske koordinater (x, y, z), *med enhetsvektorer henholdsvis* $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ *og* $\hat{\mathbf{k}}$*:*

$$\begin{aligned}
{\rm grad}V = \vec{\nabla}V &= \hat{\mathbf{i}}\,\frac{\partial V}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}}\,\frac{\partial V}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}}\,\frac{\partial V}{\partial z}\\
{\rm div}\vec{D} = \vec{\nabla}\cdot\vec{D} &= \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}\\
\vec{\nabla}^2 V &= \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\\
{\rm curl}\,\vec{D} = \vec{\nabla}\times\vec{D} &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ D_x & D_y & D_z \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

Sylinderkoordinater (r, ϕ, z), *med enhetsvektorer henholdsvis* $\hat{\mathbf{r}}$, $\hat{\phi}$ *og* $\hat{\mathbf{k}}$:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}V &= \hat{\mathbf{r}}\,\frac{\partial V}{\partial r} + \hat{\phi}\,\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \phi} + \hat{\mathbf{k}}\,\frac{\partial V}{\partial z}\\
\vec{\nabla}\cdot\vec{D} &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rD_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial D_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial D_z}{\partial z}\\
\vec{\nabla}^2 V &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}
\end{aligned}$$

Kulekoordinater (r, θ, ϕ), *med enhetsvektorer henholdsvis* $\hat{\mathbf{r}}$, $\hat{\theta}$, $\hat{\phi}$:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}V &= \hat{\mathbf{r}}\,\frac{\partial V}{\partial r} + \hat{\theta}\,\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} + \hat{\phi}\,\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}\\
\vec{\nabla}\cdot\vec{D} &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 D_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(D_\theta\sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial D_\phi}{\partial \phi}\\
\vec{\nabla}^2 V &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}
\end{aligned}$$

Divergensteoremet og Stokes' teorem for et tilfeldig vektorfelt $\vec{F}$*:*

$$\oiint \vec{F}\cdot{\rm d}\vec{A} = \iiint \vec{\nabla}\cdot\vec{F}\;{\rm d}\tau$$

$$\oint \vec{F}\cdot{\rm d}\vec{s} = \iint\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)\cdot{\rm d}\vec{A}$$

Infinitesimale volumelement:

$$\begin{aligned}
{\rm d}\tau &= {\rm d}x\,{\rm d}y\,{\rm d}z\\
{\rm d}\tau &= r^2\,{\rm d}r\,\sin\theta\,{\rm d}\theta\,{\rm d}\phi \xrightarrow{\text{kulesymmetri}} 4\pi r^2\,{\rm d}r\\
{\rm d}\tau &= r\,{\rm d}r\,{\rm d}\phi\,{\rm d}z \xrightarrow{\text{syl.symmetri}} 2\pi r\,{\rm d}r\,\ell
\end{aligned}$$