

NORGES TEKNISK-  
NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET  
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:

Jon Andreas Støvneng

Telefon: 73 59 36 63 / 41 43 39 30

EKSAMEN  
MNFFY 103 ELEKTRISITET OG MAGNETISME  
Onsdag 21. mai 2003 kl. 0900 - 1500  
Bokmål

Hjelpemidler: C

- K. Rottmann: Matematisk formelsamling
- O. Øgrim og B. E. Lian: Størrelser og enheter i fysikk og teknikk
- Typegodkjent kalkulator, med tomt minne, i henhold til liste utarbeidet av NTNU

Side 2 - 9: Oppgave 1 - 6.

Vedlegg 1 - 3: Formelsamling.

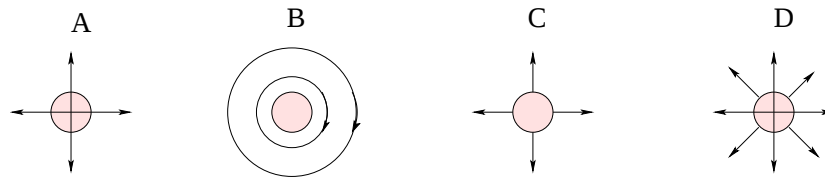
Eksamen består av 10 deloppgaver (1, 2, 3, 4a, 4b, 5a, 5b, 6a, 6b, 6c) som alle teller like mye under bedømmelsen. Vektorstørrelser er angitt med **fete** typer i oppgaveteksten. Dersom intet annet er oppgitt, kan det antas at det omgivende mediet er luft (vakuum), med permittivitet  $\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$  F/m og permeabilitet  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  H/m.

Sensuren kan ventes ca 11. juni.

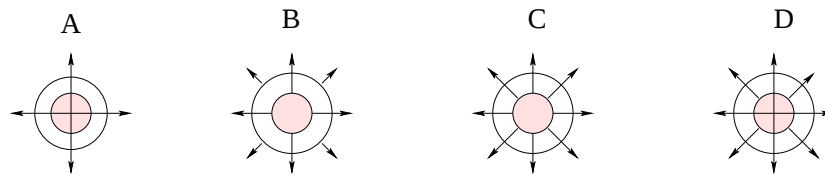
## OPPGAVE 1

Denne oppgaven består av 5 delspørsmål med 4 svaralternativ på hver, hvorav kun ett er riktig. Hvert delspørsmål besvares med *en* bokstav, A, B, C eller D. Hvert riktige svar gir 2 poeng. Feil svar gir 0 poeng.

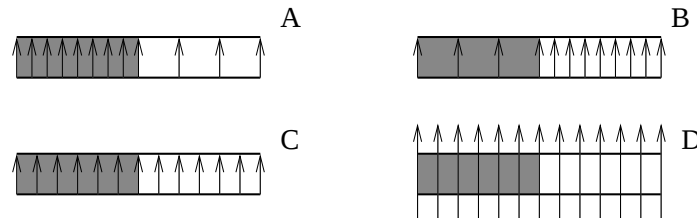
i. Riktig figur angir elektriske feltlinjer i et plan som går gjennom sentrum av en metallkule (skravert) med nettoladning  $Q > 0$ :



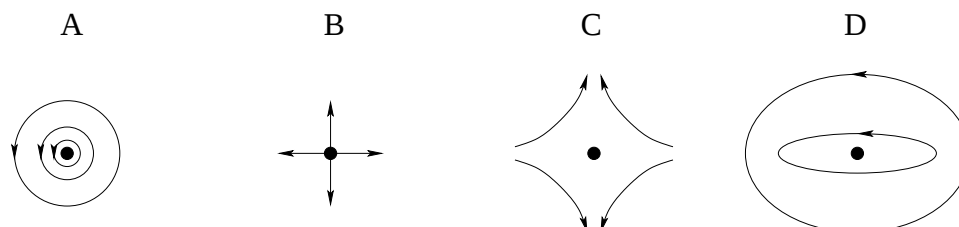
ii. Riktig figur angir elektriske feltlinjer i et plan som går gjennom sentrum av en ladet metallkule (skravert) jevnt belagt med elektrisk nøytral plast med permittivitet  $\varepsilon > \varepsilon_0$ . Det omgivende mediet er luft:



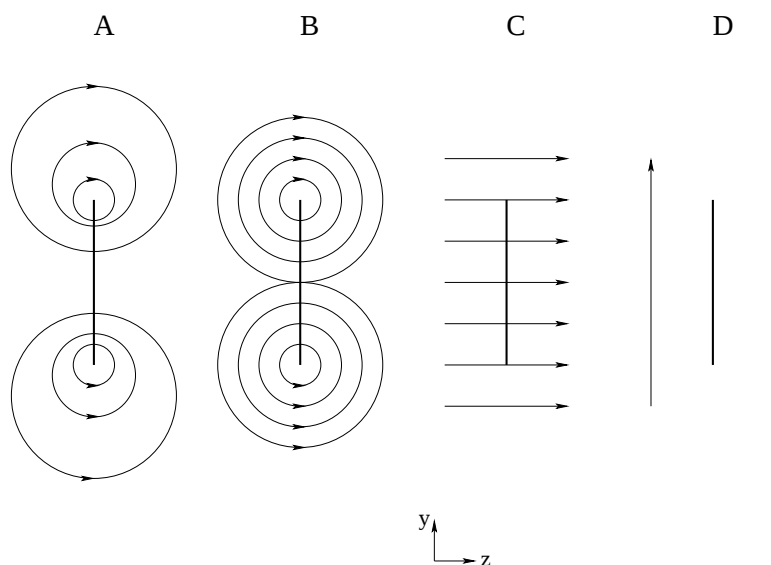
iii. Riktig figur angir elektriske feltlinjer for en parallelplatekondensator som er halvveis fylt med et dielektrisk materiale (det skraverte området). Platenes lineære utstrekning er stor i forhold til avstanden mellom platene. Øverste metallplate har negativ ladning  $-Q$ , nederste metallplate har positiv ladning  $Q$ :



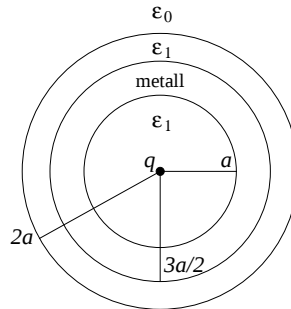
iv. Riktig figur angir magnetiske feltlinjer for en lang, rett strømførende leder, der strømmen  $I$  går vinkelrett ut av papirplanet:



v. Riktig figur angir magnetiske feltlinjer i  $yz$ -planet for ei sirkulær strømsløyfe (tykk linje) som ligger i  $xy$ -planet:



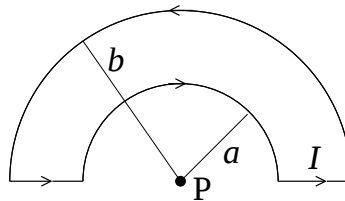
## OPPGAVE 2



En positiv punktladning  $q$  er plassert i sentrum av ei plastkule med radius  $r = a$ . Deretter følger et metallisk kuleskall med tykkelse  $a/2$ , og endelig et kuleskall av plastmaterialet med tykkelse  $a/2$ . Utenfor dette har vi luft (vakuum). Plasten har permittivitet  $\varepsilon_1 = 10\varepsilon_0$ . Bestem den elektriske feltstyrken  $\mathbf{E}$  overalt. Skisser  $E = |\mathbf{E}|$  som funksjon av  $r$ .

Oppgitt:  $\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A} = q_{\text{fri}} \quad \mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \varepsilon \mathbf{E}$

## OPPGAVE 3



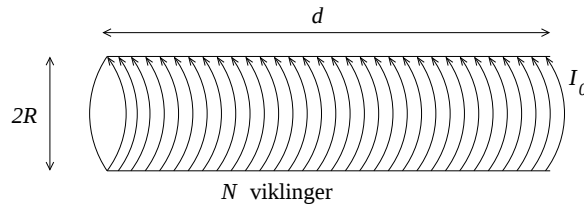
En tynn strømførende leder danner ei lukket sløyfe som ligger delvis langs periferien til to konsentriske sirkler med radius henholdsvis  $a$  og  $b$  ( $b > a$ ) og delvis langs radielt rettede forbindelseslinjer mellom de to periferiene, se figuren over. Sløyfa fører en strøm  $I$  med retning som angitt i figuren. Bestem magnetfeltet  $\mathbf{B}$  (størrelse og retning) i punktet P, dvs i sentrum av de to sirklene.

Oppgitt: På symmetriaksen til ei sirkulær strømsløyfe (strømstyrke  $I$ ) med radius  $L$  er størrelsen på magnetfeltet

$$B = \frac{\mu_0 I L^2}{2 (L^2 + d^2)^{3/2}}$$

i en avstand  $d$  fra strømsløyfas sentrum, langs symmetriaksen.

## OPPGAVE 4



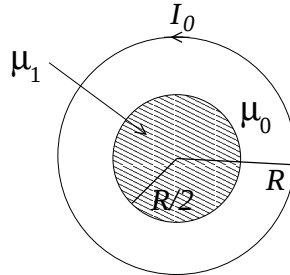
a) Bruk Amperes lov til å vise at magnetfeltet inne i en (tilnærmet uendelig) lang, luftfylt spole med lengde  $d$  og  $N$  jevne og tette viklinger av en tynn spoletråd som fører en strøm  $I_0$  er

$$B_0 = \frac{\mu_0 N I_0}{d}$$

Du kan anta at magnetfeltet er homogent inne i spolen. Tegn en figur som viser hva slags “Amperekurve” (dvs integrasjonsvei) du har valgt. Bestem også selvinduktansen  $L_0$  til en slik spole når spolen har radius  $R$ .

Oppgitt:  $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I$   $\Phi = LI$

b) Spolen fylles nå delvis med en ferromagnetisk sylinder med lengde  $d$  og radius  $R/2$ . Figuren nedenfor viser et tverrsnitt av spolen:



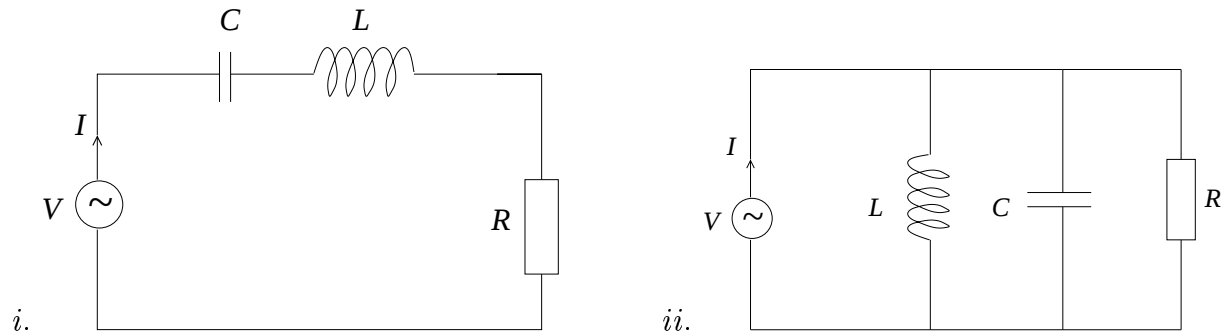
Det ferromagnetiske materialet har permeabilitet  $\mu_1 = \mu_r \mu_0$  (dvs relativ permeabilitet  $\mu_r$ ). Når det går en strøm  $I_0$  i spoletråden, blir magnetfeltet  $B_1$  inne i den ferromagnetiske sylindren ( $r < R/2$ ) forskjellig fra feltet  $B_0$  i det luftfylte sjiktet rundt ( $R/2 < r < R$ ). Forklar kort hvorfor. Hvor er feltet størst? Hva blir selvinduktansen  $L_1$  til denne delvis fylte spolen?

Oppgitt:  $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_{\text{fri}}$   $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{M} = \mu \mathbf{H} = \mu_r \mu_0 \mathbf{H}$

## OPPGAVE 5

a) Bruk Kirchhoffs spenningsregel til å vise at impedansen  $Z = |Z| \exp(i\alpha) \equiv \{|Z|, \alpha\}$  til en motstand  $R$ , kapasitans  $C$  og induktans  $L$  er henholdsvis  $\{R, 0\}$ ,  $\{1/\omega C, -\pi/2\}$  og  $\{\omega L, \pi/2\}$ . Ta utgangspunkt i enkle kretser, henholdsvis  $VR$ -,  $VC$ - og  $VL$ -krets, med harmonisk spenningskilde  $V = V_0 \cos \omega t$ , eventuelt på kompleks form  $V = V_0 \exp(i\omega t)$ .

b) Du har en motstand med resistans  $R = 25 \Omega$ , en kondensator med kapasitans  $C = 40 \mu\text{F}$  og en spole med induktans  $L = 250 \mu\text{H}$ . Bestem impedansen (både absoluttverdi og fasevinkel) til følgende vekselspenningskretser når spenningskilden er  $V = V_0 \cos \omega t$  med vinkelfrekvens  $1000 \text{ s}^{-1}$ .



Oppgitt:

Seriekobling av komplekse impedanser:  $Z = \sum_i Z_i$

Parallellkobling av komplekse impedanser:  $Z^{-1} = \sum_i Z_i^{-1}$

Betydningen av absoluttverdi og fasevinkel til impedans:

Når en vekselspenningskilde  $V = V_0 \cos \omega t$  resulterer i en vekselstrøm  $I = I_0 \cos(\omega t - \alpha)$ , har kretsen en impedans med absoluttverdi  $|Z| = V_0/I_0$  og fasevinkel  $\alpha$ .

Spenningsfall over motstand:  $RI$

kapasitans:  $Q/C$

induktans:  $LdI/dt$

(retningen på spenningsfallene må du vurdere selv)

**OPPGAVE 6**

a) Bruk antagelsene og opplysningene gitt nedenfor til å vise at antall elektroner i ledningsbåndet ( $N_c$ ) pr volumenhet ( $V$ ),  $n = N_c/V$ , for en *ren* halvlederkrystall med båndgap  $E_g = E_c - E_v$  har en temperaturavhengighet på formen

$$n = AT^{3/2} \exp\left(-\frac{E_g}{2k_B T}\right)$$

Bestem konstanten  $A$ . (Dvs: Uttrykk  $A$  ved kjente eller oppgitte størrelser.) Anta at halvlederen er germanium (Ge) med et båndgap på 0.67 eV. Med hvilken faktor økes da  $n$  dersom temperaturen økes fra 300 til 600 K?

Antagelser:

- Bruk fritt-elektronmodellen for tilstandstettheten i ledningsbåndet,

$$D_c(E) = \frac{V}{2\hbar^3 \pi^2} (2m_c)^{3/2} (E - E_c)^{1/2}$$

(basert på at  $E(k) = E_c + \hbar^2 k^2 / 2m_c$ )

- Sannsynligheten for at en tilstand med energi  $E$  ( $E \gg \mu$ ) er okkupert:

$$f(E) \simeq \exp\left(\frac{\mu - E}{k_B T}\right)$$

- Det kjemiske potensialet ligger midt i båndgapet:

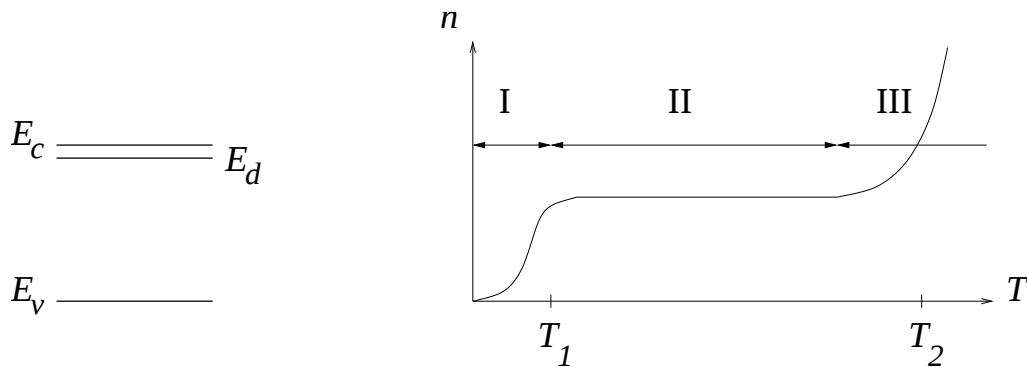
$$\mu = \frac{1}{2}(E_v + E_c)$$

Oppgitt:

- Antall elektroner med energi i intervallet  $(E, E + dE)$ :  $dN_c(E) = D_c(E)f(E)dE$
- $\int_0^\infty x^{1/2} e^{-x} dx = \frac{1}{2} \pi^{1/2}$
- Boltzmanns konstant:  $k_B = 8.617 \cdot 10^{-5}$  eV/K.

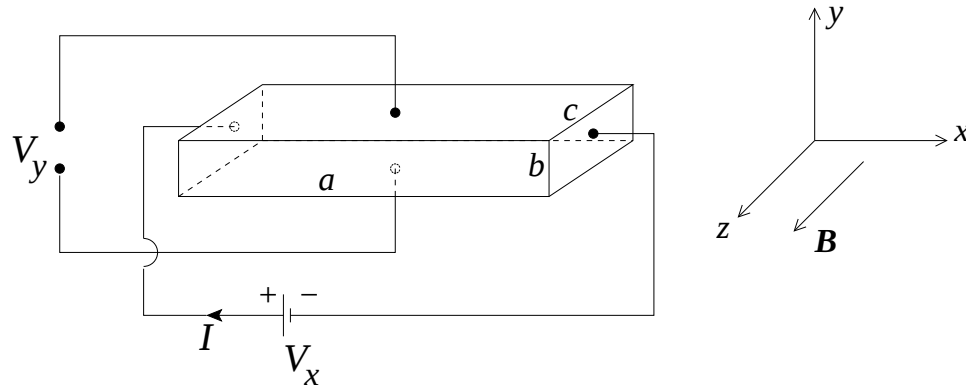
b) Figuren til venstre angir toppen av valensbåndet,  $E_v$ , og bunnen av ledningsbåndet,  $E_c$ , i halvledermaterialet germanium (Ge). I et arsenatom (As) som plasseres i en Ge-krystall vil elektronet med høyest energi ha energien  $E_d$ .

Figuren til høyre viser temperaturavhengigheten til konsentrasjonen av elektroner i ledningsbåndet,  $n(T)$ , for Ge forurenset (dopet) med As-atomer.



Gi en kort, kvalitativ forklaring på oppførselen til  $n(T)$  i de ulike temperaturintervallene (I, II, III) når vi varmer opp krystallen fra  $T = 0$ . Hvordan er de to temperaturene  $T_1$  og  $T_2$  (i størrelsesorden) relatert til energinivåene i figuren til venstre?

c) En bit silisium med lengde  $a = 30$  mm, tykkelse  $b = 3$  mm og bredde  $c = 5$  mm er forurenset (dopet) med såkalte donoratomer. Ved den gjeldende temperatur kan vi med god tilnærming anta at samtlige donoratomer har avgitt ett elektron til ledningsbåndet i silisium. Vi antar dessuten at konsentrasjonen  $N_D$  av donoratomer er tilstrekkelig stor til at vi kan se bort fra den “intrinsiske” konsentrasjonen av elektroner og hull som skyldes termisk eksitasjon av elektroner fra valensbånd til ledningsbånd i silisium. Vi har altså kun mobile *elektroner* til stede, med en konsentrasjon  $n = N_D$ .



Du skal bestemme  $n$  ved hjelp av et Halleksperiment, se figuren over. Halvlederen er plassert i et homogent magnetfelt  $\mathbf{B} = B_z \hat{z}$  (der  $\hat{z}$  er enhetsvektor langs  $z$ -aksen). Med en påtrykt spenning  $V_x$  over halvlederen i  $x$ -retning går det en strøm  $I$ . Samtidig måler du en “Hallspenning”  $V_y$  over halvlederen i  $y$ -retning.

Utleid en sammenheng mellom elektronkonsentrasjonen  $n$  og størrelser som måles i Halleksperimentet. Bestem  $n$  når  $B_z = 0.3$  T,  $I = 3.4$  mA og  $V_y = 4.7$  mV.

Anta at angitt retning på  $I$  i figuren tilsvarer en positiv strøm. I hvilken retning virker da den magnetiske kraften på elektronene? Hva blir retningen (polariteten) på  $V_y$ ?

Oppgitt:

Lorentzkraften:  $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$

Strømtetthet:  $\mathbf{j} = nq\mathbf{v}$

Elementærladningen:  $e = 1.6 \cdot 10^{-19}$  C

## Formelsamling MNFFY 103 Elektrisitet og magnetisme

$\int d\mathbf{A}$  angir flateintegral og  $\int d\mathbf{l}$  angir linjeintegral.  $\oint$  angir integral over lukket flate eller rundt lukket kurve. Formlenes gyldighetsområde og de ulike symbolenes betydning antas forøvrig å være kjent.

### *Elektrostatikk og magnetostatikk*

- Coulombs lov:

$$\mathbf{F} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

- Elektrisk felt og potensial:

$$\mathbf{E} = -\nabla V$$

- Elektrisk potensial fra punktladning:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$

- Elektrisk fluks:

$$\phi_E = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}$$

- Gauss lov for elektrisk felt:

$$\epsilon_0 \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = q$$

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A} = q_{\text{fri}}$$

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{\text{fri}}$$

- Elektrostatisk kraft er konservativ:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

- Elektrisk forskyvning:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \mathbf{E} = \varepsilon \mathbf{E}$$

- Elektrisk dipolmoment:

$$\mathbf{p} = q \mathbf{d}$$

- Elektrisk polarisering:

$$\mathbf{P} = \frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta V}$$

- Kapasitans:

$$C = \frac{q}{V}$$

- Energitetthet i elektrisk felt:

$$u_E = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}$$

- Magnetisk fluks:

$$\phi_B = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}$$

- Gauss lov for magnetfelt:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0$$

- Ampères lov:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I$$

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_{\text{fri}}$$

- Magnetfelt fra strømførende leder:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{d\mathbf{l} \times \hat{r}}{r^2}$$

- Magnetiserende felt  $\mathbf{H}$ :

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M} = \frac{1}{\mu_r \mu_0} \mathbf{B} = \frac{1}{\mu} \mathbf{B}$$

### Vedlegg 3 av 3

- Magnetisk moment:

$$\boldsymbol{\mu} = I \mathbf{A}$$

- Magnetisering:

$$\mathbf{M} = \frac{\Delta \boldsymbol{\mu}}{\Delta V}$$

- Magnetisk kraft på rett strømførende leder:

$$\mathbf{F} = I \mathbf{L} \times \mathbf{B}$$

- Energitetthet i magnetfelt:

$$u_B = \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}$$

### *Elektromagnetisk induksjon*

- Faraday–Henrys lov:

$$\mathcal{E} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \phi_B$$

- Ampère–Maxwells lov:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \left( I + \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} \right)$$

- Selvinduktans:

$$L = \frac{\phi_B}{I}$$

- Gjensidig induktans:

$$M_{12} = \frac{\phi_1}{I_2} \quad , \quad M_{21} = \frac{\phi_2}{I_1}$$
$$M_{12} = M_{21} = M$$

- Energitetthet i elektromagnetisk felt:

$$u = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} + \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}$$