

NORGES TEKNISK-
NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Jon Andreas Støvneng
Telefon: 73 59 36 63 / 41 43 39 30

EKSAMEN I FAG

SIF 4012 ELEKTROMAGNETISME
(SIF 4012 FYSIKK 2)

Onsdag 11. desember 2002

kl. 0900-1400

Bokmål

Hjelpemidler: C

- K. Rottmann: Matematisk formelsamling
- O. Øgrim og B. E. Lian: Størrelser og enheter i fysikk og teknikk
- Typegodkjent kalkulator, med tomt minne, i henhold til liste utarbeidet av NTNU

Side 2 – 6: Oppgave 1 – 6.
Vedlegg 1 – 3: Formelsamling.

Eksamen består av 10 deloppgaver (1, 2, 3, 4a, 4b, 4c, 5a, 5b, 6a, 6b) som alle teller like mye under bedømmelsen.

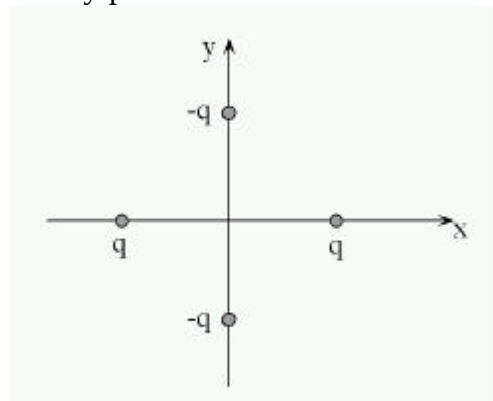
Vektorstørrelser er angitt med **fete** typer i oppgaveteksten, eventuelt med en pil over symbolet i enkelte ligninger og uttrykk.

Dersom intet annet er oppgitt, kan det antas at det omgivende mediet er vakuum (evt luft), med permittivitet $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ F/m og permeabilitet $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m.

Sensuren kan ventes ca 6. januar 2003.

OPPGAVE 1

Fire punktladninger er plassert i xy-planet:



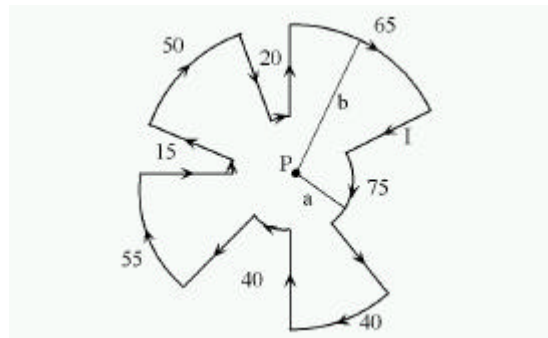
To har positiv ladning q og ligger på x -aksen i henholdsvis $x = a$ og $x = -a$, og to har negativ ladning $-q$ og ligger på y -aksen i henholdsvis $y = a$ og $y = -a$. Skisser feltlinjer (i xy -planet) for det elektriske feltet $\mathbf{E}$. Bestem potensialet $V(x)$ og det elektriske feltet $\mathbf{E}(x)$ på x -aksen (du kan anta $x > a$). Langt ute på den positive x -aksen, dvs for $x \gg a$, kan vi tilnærmet skrive

$$\mathbf{E} = \frac{k}{4\pi\epsilon_0 x^n} \hat{x} \quad (\hat{x} \text{ er enhetsvektor i } x\text{-retning})$$

Vis dette og bestem konstanten k og eksponenten n .

Oppgitt: $\mathbf{E} = -\nabla V$ $(1 + u)^{-p} = 1 - p u + \frac{1}{2} p(p+1) u^2 \dots$ ($|u| < 1$)

Potensial fra punktladning: $V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$

OPPGAVE 2

En tynn strømførende leder danner ei lukket sløyfe som ligger delvis langs periferien til to konsentriske sirkler med radius henholdsvis a og b ($b > a$) og delvis langs radielt rettede forbindelseslinjer mellom de to periferiene, se figuren over. Sløyfa fører en strøm I . I figuren er det angitt hvor mange grader de åtte sirkelbuene spenner over. Punktet P ligger i sentrum av de to sirkelene. Bestem magnetfeltet $\mathbf{B}$ (størrelse og retning) i punkt P .

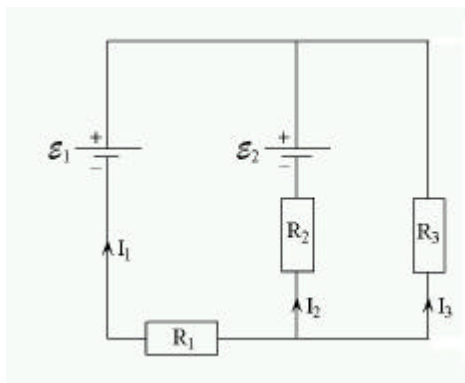
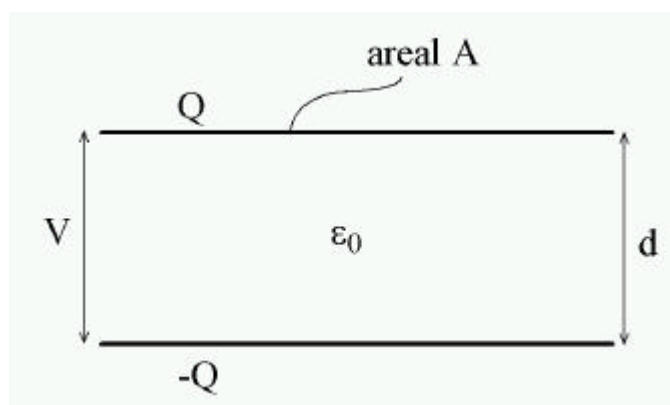
Oppgitt: På symmetriaksen til ei sirkulær strømsløyfe (strømstyrke I) med radius L er størrelsen på

magnetfeltet $B = \frac{\mu_0 I L^2}{2(L^2 + d^2)^{3/2}}$ i en avstand d fra strømsløyfas sentrum.

Magnetfelt $d\mathbf{B}$ fra strømelement $I d\mathbf{l}$: $d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\mathbf{l} \times \hat{r}}{r^2}$

OPPGAVE 3

Bestem strømstyrkene I_j ($j = 1, 2, 3$) for følgende likestrømkrets med motstander $R_j = j \, \Omega$ ($j = 1, 2, 3$) og ideelle spenningskilder $E_j = j \, \text{V}$ ($j = 1, 2$):

**OPPGAVE 4**

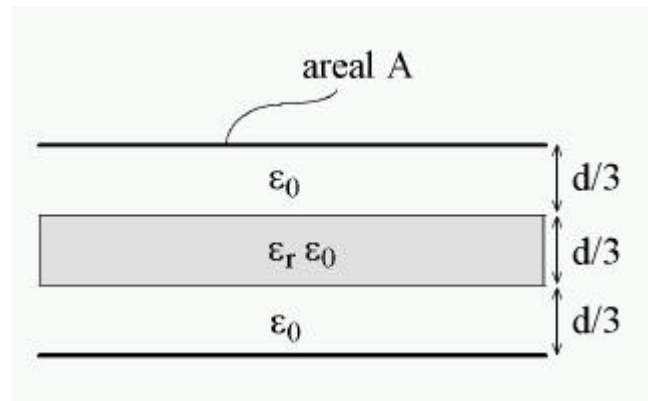
a) Vis at kapasitansen $C_0 = Q/V$ til en luftfylt parallellplatekondensator (permittivitet ϵ_0) med plateareal A og avstand d mellom lederplatene er

$$C_0 = \epsilon_0 \frac{A}{d}$$

når vi antar at det elektriske feltet er homogent i hele området mellom platene. Anta at platenes lineære utstrekning er mye større enn plateavstanden d .

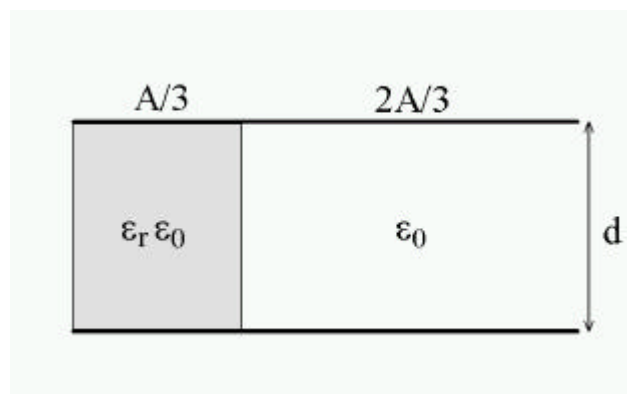
Oppgitt: Elektrisk felt fra uendelig stor flate med ladningstetthet σ er: $\sigma/2\epsilon_0$

b) Du har et stykke dielektrisk materiale tilgjengelig, med volum $Ad/3$ og permittivitet $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ (dvs relativ permittivitet ϵ_r). Hva blir kapasitansen C_1 til kondensatoren dersom ditt dielektrikum har areal A og tykkelse $d/3$, og plasseres midt mellom platene som vist i følgende figur:



Med en potensialforskjell V mellom lederplatene blir det elektriske feltet E_2 inne i dielektrikumet forskjellig fra feltet E_1 i de to luftfylte sjiktene. Forklar kort hvorfor. Hvor er feltet størst? Hva blir forholdet mellom induisert ("bundet") overflateladning på dielektrikumet, σ_b , og "fri" flateladning på lederplatene, σ_f , uttrykt ved ϵ_r ?

c) Dersom du i stedet former ditt dielektrikum til en bit med areal $A/3$ og tykkelse d , og plasserer det mellom platene på følgende måte,



blir kapasitansen C_2 "betydelig større" enn C_1 dersom vi har valgt et dielektrikum med ϵ_r "betydelig større" enn 1. Underbygg denne påstanden ved å regne ut C_2 . (Alternativt: Gi en kvalitativ begrunnelse i grensen $\epsilon_r \gg 1$.) (Faktisk er $C_2 > C_1$ for alle verdier av $\epsilon_r > 1$.)

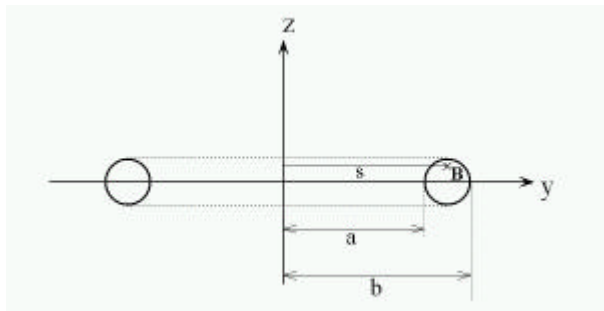
Oppgitt: $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \epsilon \mathbf{E} = \epsilon_r \epsilon_0 \mathbf{E}$

Tips: Kapasitansene C_1 og C_2 kan betraktes som seriekobling eller parallellkobling av flere kapasitanser. Avgjør selv typen kobling (serie eller parallell) og hva "flere" står for i hvert enkelt tilfelle.

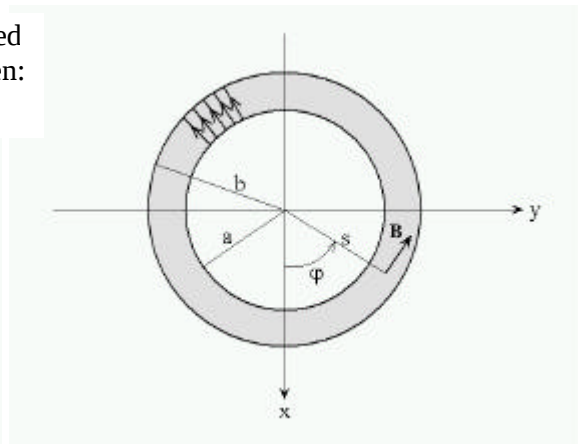
OPPGAVE 5

En luftfylt toroide, dvs en "smultringformet" spole, er jevnt og tett viklet med N viklinger av en spoletråd. Toroiden har indre radius a og ytre radius b . I figuren til høyre er bare fem av viklingene tegnet inn. I spoletråden går en strøm I . Retningen på magnetfeltet $\mathbf{B}$ er da tangentiell til en sirkel med sentrum på toroidens akse (z -aksen), dvs i sylindervektor (se figuren): $\mathbf{B} = (0, B, 0)$. Her er s avstanden fra z -aksen, mens ϕ er vinkelen mellom x -aksen og s . (I figuren til venstre er altså $\phi = \pi/2$.)

Snitt gjennom toroiden
i yz -planet:

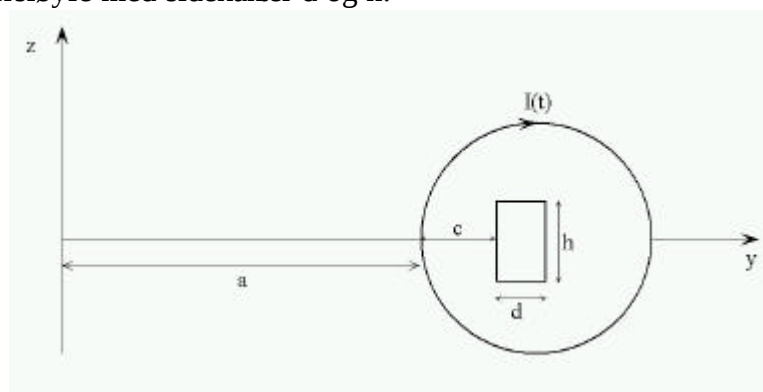


Toroiden sett ned
langs z -aksen:



a) Bruk Amperes lov til å vise at $B = kI_0/s$ inne i toroiden. Bestem k . Hva blir B utenfor toroiden (dvs når $s < a$, $s > b$ eller $|z| > (b-a)/2$)?

b) Inne i toroiden, i yz -planet og i en avstand c fra toroidens innerkant, er det plassert en rektangulær ledersløyfe med sidekanter d og h :



Bestem den gjensidige induktansen M mellom toroiden og den rektangulære lederen. Bestem videre induisert elektromotorisk spenning E i den rektangulære lederen når strømmen $I(t)$ i spoletråden skrues på ved tiden $t = 0$ og varierer med tiden på følgende måte:

$$I(t) = \begin{cases} a t I_0 & 0 < t < \frac{1}{a} \\ I_0 & t \geq \frac{1}{a} \end{cases}$$

Angi retningen på E .

Oppgitt: $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$ $\Phi = M I$ $\int \frac{dy}{y} = \ln y$ $E = - d\Phi/dt$

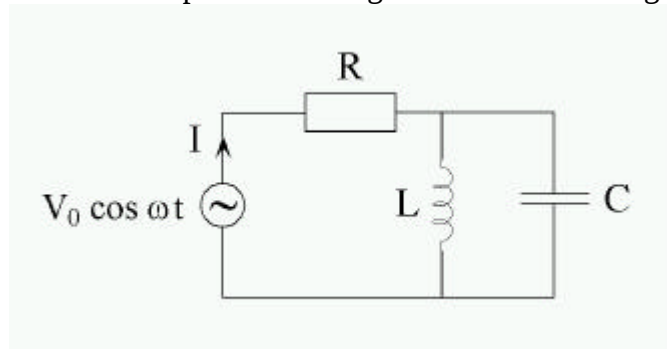
OPPGAVE 6

a) Hva er impedansen $Z = V/I$ for

- i. en motstand 1Ω ,
- ii. en kapasitans $100 \mu\text{F}$,
- iii. en induktans $100 \mu\text{H}$

når spenning V og strøm I varierer harmonisk med tiden, med vinkelfrekvens $\omega = 1000 \text{ s}^{-1}$?
Angi både absoluttverdi $|Z|$ og fasevinkel α i hvert enkelt tilfelle. ($Z = |Z| \exp(i\alpha)$)

b) Vekselstrømkretsen i figuren nedenfor, med vekselspenningskilde $V = V_0 \cos \omega t$, består av en motstand R seriekoblet med en parallellkobling av en induktans L og en kapasitans C :



Kretsens totale impedans $Z_0 = V/I$ kan skrives på kompleks form $Z_0 = |Z_0| \exp(i\alpha_0)$, med absoluttverdi

$$|Z_0| = R \left[1 + \left(\frac{\omega / \omega_1}{1 - \omega^2 / \omega_0^2} \right)^2 \right]^{1/2}$$

og fasevinkel

$$\alpha_0 = \arctan \left(\frac{\omega / \omega_1}{1 - \omega^2 / \omega_0^2} \right)$$

Vis dette og bestem de ”karakteristiske” vinkelfrekvensene ω_0 og ω_1 (uttrykt ved R , L og C).
Skisser amplituden I_0 til strømmen I som funksjon av ω (f.eks. opp til $\omega = 4 \omega_0$) når $\omega_0 = \omega_1$.
Bestem tallverdi for ω_0 og ω_1 dersom R , L og C har verdier som gitt under punkt a).

Opgitt:

Seriekobling av komplekse impedanser: $Z = \sum_i Z_i$

Parallellkobling av komplekse impedanser: $Z^{-1} = \sum_i Z_i^{-1}$

Betydningen av absoluttverdi og fasevinkel til impedansen er som følger:

Dersom en vekselspenningskilde $V = V_0 \cos \omega t$ resulterer i en vekselstrøm $I = I_0 \cos(\omega t - \alpha)$, har kretsen en impedans med absoluttverdi $|Z| = V_0/I_0$ og fasevinkel α .

Spenningsfall over motstand: RI
 kapasitans: Q/C
 induktans: LdI/dt

(retningen på spenningsfallene må du vurdere selv)