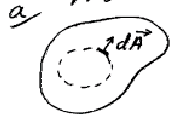


Forslag til løsning.

Oppgave 1



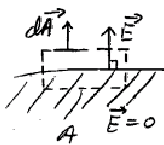
3) Likevekt kan det ikke være noe elektrisk felt i ledere, dvs. $\vec{E} = 0$ (ellers vil det gå strøm).
Danner vi et lukket volum inne i ledere og benytter Gauss lov ved å integrere over overflaten til dette volumet. Med $\vec{E} = 0$ gir dette

$$\Phi = \epsilon_0 \int_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0$$

Dvs. nettoladningen $Q = 0$ innefor et slikt volum.
Følgelig må all nettoladning være plassert på overflaten.



Når en ladet metallkule berører innviden av et lukket metallkulerom vil hele ladningen overføres til ytre flaten av systemet da det ikke kan være nettoladning på innerflaten i likevekt (da $\vec{E} = 0$ også i hulrommet).



For å finne sammenhengen mellom $\vec{E}$ og σ langs en metalloverflate kan en benytte Gauss lov. Ved å integrere over overflaten til det skisserte volumet finner en

$$\epsilon_0 \int_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \epsilon_0 EA = \Phi = \sigma A$$

$$\underline{\underline{\sigma = \epsilon_0 E}}$$

Oppgave 2.

a) Sammenhengen mellom overflateladning σ og elektrisk felt $\vec{E}$ blir som i oppgave 1 slik at

$$\sigma = \epsilon_0 E$$

Nå er videre $\sigma = Q/A$ og $E = V/d$ der V er spenningen mellom platene slik at an finner

$$\frac{Q}{A} = \epsilon_0 \frac{V}{d}$$

og kapasitansen blir

$$C_0 = \frac{Q}{V} = \epsilon_0 \frac{A}{d}$$

Med konstant relativ permittivitet ϵ_r blir kapasitansen

$$C = \epsilon_r C_0 = \epsilon_r \epsilon_0 \frac{A}{d}$$

Numerisk

$$C = 56,885 \cdot 10^{-12} \frac{AS}{Vm} \frac{1,2 \cdot 10^{-2} m^2}{3 \cdot 10^{-3} m} = 198,10^{-12} As/V \approx 200 pF$$

b) Med dielektrisk medium vil overflateladning $\sigma = \epsilon_0 E$ erstattes med

$$D = \sigma = Q/A$$

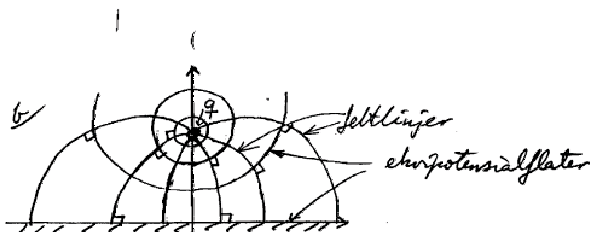
Dette er også verdien til D mellom platene, dvs

$$D_z = D = D(z) = \frac{Q}{A} \quad (= \text{konst})$$

da det ikke finnes fri romladning mellom platene.

Det elektriske feltet følger nå fra $\vec{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E}$

$$E_z = E = E(z) = \frac{1}{\epsilon_r \epsilon_0} D = \frac{1}{a+bz} \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (\sigma = \frac{Q}{A})$$



(2)

(hjelpeladning" for å skissere dipolfeltet) $\rightarrow q$

Skisse av feltlinjer og ekvipotensialflater som står vinkelrett på hverandre.

c) Det elektriske feltet er gitt ved $\vec{E} = -\nabla V$. For å finne overflateladningen trenger vi bare $\vec{E}$ for $z=0$ der bare z -komponenten E_z er forskjellig fra 0.

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{z-a}{(a^2+(z-a)^2)^{3/2}} - \frac{z+a}{(a^2+(z+a)^2)^{3/2}} \right]$$

$$\xrightarrow{z \rightarrow 0} -\frac{q}{2\pi\epsilon_0} \frac{a}{(a^2+a^2)^{3/2}}$$

Overflateladningen blir følgelig

$$\underline{\underline{\sigma = \epsilon_0 E_z = -\frac{q}{2\pi} \frac{a}{(a^2+a^2)^{3/2}}}}$$

Polariseringen blir følgelig

$$P_z = P = P(z) = D - \epsilon_0 E = \sigma \left(1 - \frac{1}{a+bz} \right)$$

Potensialforskjellen (spenningen) mellom platene finnes nå ved å integrere det elektriske feltet

$$V = -\int \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\int_a^d E_z dz = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \int_a^d \frac{dz}{a+bz} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \left[\frac{1}{b} \ln(a+bz) \right]_a^d$$

$$= \frac{\sigma}{\epsilon_0} \frac{1}{b} \left(\ln(a+bd) - \ln a \right) = \frac{\sigma}{\epsilon_0 b} \ln \left(1 + \frac{bd}{a} \right)$$

Kapasitansen blir

$$C_V = \frac{Q}{V} = \frac{\sigma A}{\frac{\sigma}{\epsilon_0 b} \ln(1 + \frac{bd}{a})} = \epsilon_0 \frac{bA}{\ln(1 + \frac{bd}{a})}$$

Fri romladningstetthet er gitt ved $\rho = \nabla \cdot \vec{D}$ og samlet (nett) er gitt ved $\rho_f = \epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E}$. Følgelig er bunden romladningstetthet gitt ved

$$\rho_b = \rho_b(z) = \rho_0 - \rho = \epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} - \nabla \cdot \vec{D} = -\nabla \cdot \vec{P} = -\frac{\partial P_z}{\partial z} = -\frac{\sigma b}{(a+bz)^2}$$

Oppgave 3

⑤

a)



Benytter her Ampères lov og legger integrasjonskurven i en avstand r fra sentrum. Dette gir

$$\oint \vec{H} d\vec{s} = H \cdot 2\pi r = I = I(r)$$

$$H = \frac{I(r)}{2\pi r}$$

der $I(r)$ er strømmen innenfor radiusen r . Med jevn fordeling over ledertverrsnittet blir da

$$I(r) = \begin{cases} I \left(\frac{r}{R}\right)^2 & \text{for } r < R \\ I & \text{for } r > R \end{cases}$$

Med $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ blir følgende

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r \quad r < R$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad r > R$$

Magnetfeltet blir tangensielt til en slik jernring. $\vec{H}$ -feltet er da kontinuerlig som en også kan se direkte fra Ampères lov ovenfor. ($\oint \vec{H} d\vec{s} = 0$ med null overflatestrøm, dvs. tangensialkomponenten til $\vec{H}$ må være den samme på begge sider av overflaten). Følgelig har en innenfor jernringen

$$B = \mu_0 \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (r > R)$$

⑥

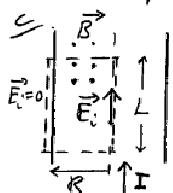
b) Motstanden til lederen er

$$R = \rho \frac{L}{A} \quad \text{der } A = \pi R^2$$

slik at spenningen og det elektriske feltet blir

$$V = RI = \rho \frac{L}{\pi R^2} I \quad \text{og} \quad E = \frac{V}{L} = \frac{\rho I}{\pi R^2}$$

Nummerisk $V = 2,82 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Vm}}{\text{A}} \cdot \frac{400 \text{ m}}{\pi (5 \cdot 10^{-3})^2 \text{ m}^2} \cdot 35 \text{ A} = \underline{5,0 \text{ V}}$



Bestemmer først magnetisk flukkes mellom sentrum og ytterradius R på et stykke av lederen av lengde L .

$$\Phi_B = \int \vec{B} d\vec{A} = L \int_0^R B dr = \frac{L \mu_0 I}{2\pi R^2} \int_0^R r dr = \underline{\frac{L \mu_0 I}{4\pi}}$$

Indusert emf.

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E}_i d\vec{s} = L E_i = - \frac{d\Phi_B}{dt}$$

$$E_i = - \frac{1}{L} \frac{d\Phi_B}{dt} = - \frac{\mu_0}{4\pi} \dot{I} = - \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d(I_0 \sin \omega t)}{dt} = \underline{\underline{- \frac{\mu_0}{4\pi} \omega I_0 \cos \omega t}}$$