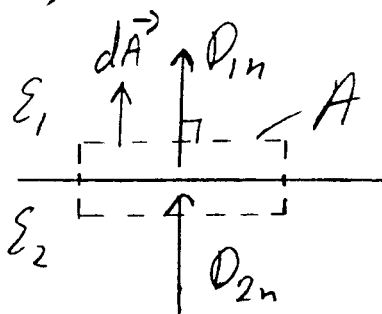


Forslag til løsning.

①

Oppgave 1.

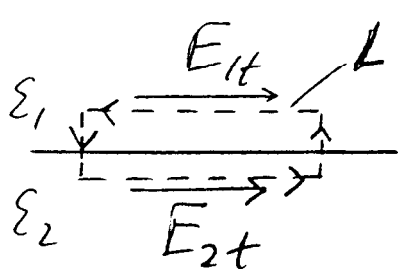
a)



Vi kan først betrakte normalkomponenten til $\vec{D}$ -feltet og benytter Gauss lov og legger en Gaussflate langs overflaten som vist på figuren. Utten ladning i grenseflaten finner en da

$$\oint \vec{D} d\vec{A} = D_{1n}A - D_{2n}A = Q = 0$$

$$\underline{\underline{D_{1n} = D_{2n}}} \quad \left[\text{evt. } \underline{\underline{\epsilon_1 E_{1n} = \epsilon_2 E_{2n}}} \right]$$



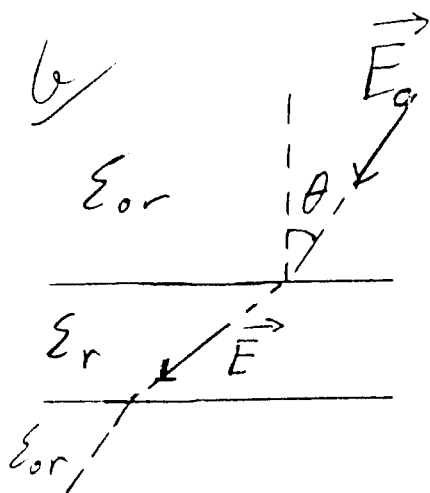
Betrakt så tangensialkomponenten til $\vec{E}$ -feltet. Kan da benytte $\oint \vec{E} d\vec{s} = 0$ og legger integrasjonskurven langs grenseflaten som vist på figuren. [Endringen $d\Phi_B/dt$ i magnetisk

fluks kan negliseres da arealet innenfor integrasjonskurven vil reduseres til null når kurven nærmer seg grenseflaten. I det elektrostatiske tilfellet er også $d\Phi_B/dt = 0$.]

Følgelig finner en

$$\oint \vec{E} d\vec{s} = -E_{1t}L + E_{2t}L = 0$$

$$\underline{\underline{E_{1t} = E_{2t}}}$$



(2)

Dekomponerer feltet først
i normal- og tangential-
komponenter E_{on} og E_{ot}

$$E_{on} = E_0 \cos \theta$$

$$E_{ot} = E_0 \sin \theta$$

Bruk at grensebetingelser da $D_n = D_{on}$ eller

$$\epsilon_r E_n = \epsilon_{0r} E_{on}$$

$$E_n = \frac{\epsilon_{0r}}{\epsilon_r} E_0 \cos \theta$$

og $E_t = E_{ot} = \underline{E_0 \sin \theta}$

Størrelsen til E blir følgende

$$E = \sqrt{E_n^2 + E_t^2} = \underline{\underline{E_0 \left[\left(\frac{\epsilon_{0r}}{\epsilon_r} \cos \theta \right)^2 + \sin^2 \theta \right]^{1/2}}}$$

Nummerisk:

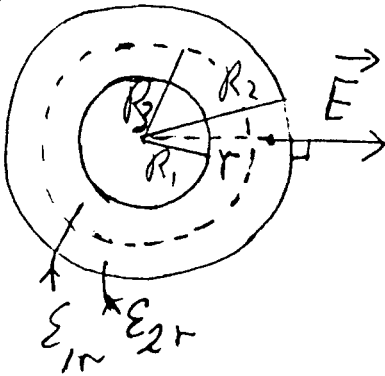
~~$$E = 100 \text{ V/mm} \left[\left(\frac{2}{5} \cos 25^\circ \right)^2 + \sin^2 25^\circ \right]^{1/2} = 55,1 \text{ V/mm}$$~~

$$E_0 = \frac{E}{\left[\right]^{1/2}} = 180 \text{ V/mm}$$

Oppgave 2.

③

a/



På grunn symmetrien kan en her benytte Gauss lov til å bestemme det elektriske feltet. Gaussflaten blir en sylinder med radius r og lengde L

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{A} = \epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \epsilon_0 E \cdot 2\pi r L = Q$$

$$E = \frac{Q}{2\pi \epsilon_0 L} \frac{1}{r}$$

(Dvs. størrelsen $A = Q/2\pi \epsilon_0 L$. Arealet av den krumme sylinderoverflaten er $2\pi r L$. Endeflatene vil ikke bidra her da $\vec{E}$ er parallell disse.)

b/ For å bestemme kapasitansen må potensialforskjellen mellom de 2 sylinderflatene beregnes. Med $\vec{E} = -\nabla V$ eller $dV = -E_r dr = -E dr$

finnes en R_1 R_2 R_2

$$V = - \int_{R_2}^{R_1} E dr = \int_{R_1}^{R_2} \frac{A}{r} dr = \left| A \ln r \right|_{R_1}^{R_2} = \underline{A \ln(R_2/R_1)}$$

Kapasitansen blir følgende:

$$C_0 = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{Q}{2\pi \epsilon_0 L} \ln(R_2/R_1)} = \underline{\underline{\frac{2\pi \epsilon_0 L}{\ln(R_2/R_1)}}}$$

(4)

Med dielektrisk medium mellom de 2
 sylinderflatene kan den resulterende kapasitansen
 betraktes som en seriekobling av 2 kapasitanser
 C_1 og C_2 . Da gjelder ($Q = Q_1 = Q_2$, $V = V_1 + V_2$)

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{C_2 + C_1}{C_1 C_2}$$

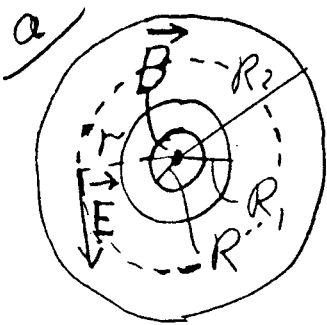
Med grenseflate ved $r = R_3$ har en de

$$C_1 = 2\pi \epsilon_0 L \frac{\epsilon_{1r}}{\ln(R_3/R_1)}$$

$$C_2 = 2\pi \epsilon_0 L \frac{\epsilon_{2r}}{\ln(R_2/R_3)}$$

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \underline{\underline{2\pi \epsilon_0 L \frac{\epsilon_{1r} \epsilon_{2r}}{\epsilon_{1r} \ln(R_2/R_3) + \epsilon_{2r} \ln(R_3/R_1)}}}$$

(5)

Oppgave 3

Det induerte elektriske feltet er bestemt av induksjonsloven (oppsett under oppgave 1)

$$\oint \vec{E} d\vec{s} = - \frac{d\Phi_B}{dt}$$

der Φ_B er magnetisk fluks innenfor integrasjons-
sløyfen som i vårt tilfelle velges som en sirkel
med radius r . Den magnetiske fluksen er da

$$\Phi_B = \int \vec{B} d\vec{A} = B \cdot A = \pi R^2 B_0 \sin \omega t$$

der $A = \pi R^2$ er arealet innenfor solenoïden. Vi finner

$$\oint \vec{E} d\vec{s} = 2\pi r E = - \frac{d\Phi_B}{dt} = \omega \pi R^2 B_0 \cos \omega t$$

$$E = - \frac{\omega R^2 B_0 \cos \omega t}{2r}$$

(Ovs. størrelsen $K = \frac{1}{2} \omega R^2 B_0 \cos \omega t$.)

b/ For en sirkelformet strømsløyfe som fører en strøm dI blir magnetfeltet i sentrum

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} dI \int \frac{d\vec{s} \times \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{dI}{r^2} \oint ds = \frac{\mu_0 dI}{2r}$$

Strømtettheten i ringen er nå gitt ved

$$J = \sigma E = \sigma K / r$$

Den elektriske strømmen i en smalt ring af bredde dr blir så

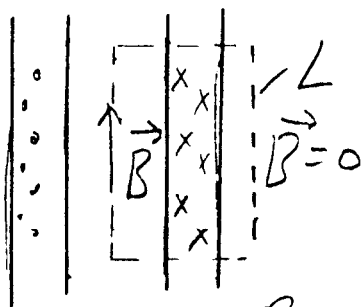
$$dI = J dA = J dr = \frac{\sigma K d}{r} dr$$

Det genererte magnetfeltet blir følgelig

$$B_s = \int dB = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu_0 \sigma K d}{2r} dr = \frac{\mu_0 \sigma K d}{2} \left(-\frac{1}{r} \right) \Big|_{R_1}^{R_2} \\ = \frac{1}{2} \mu_0 \sigma K d \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

≡

Med d stor kan en benytte Amperes lov.



Strømmen innenfor integrasjons-
sløyfen er gitt ved

$$I = \int J dA = \int_0^L \int_{R_1}^{R_2} \frac{\sigma K}{r} dr dL =$$

$$= \sigma K L \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \underline{\underline{\sigma K L \ln(R_2/R_1)}}$$

Amperes lov

$$\oint \vec{B} d\vec{s} = LB = \mu_0 I = \mu_0 \sigma K L \ln(R_2/R_1)$$

$$B = \underline{\underline{\mu_0 \sigma K \ln(R_2/R_1)}}$$