

Eks. 20. aug. 2010 Løsningsforslag.**Oppgave 1. Flervalgsspørsmål**

Oppgave:	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
Rett svar:	E	B	E	E	C	C	D	B	D	A

Detaljer om noen av spørsmålene:

- a) E. Ladningene Q_1 og Q_3 gir like felt i motsatte retninger og nuller derfor hverandre ut. Ladningen Q_2 gir felt i horisontal retning til venstre, dvs fra Q_2 til P. Ingen alternativ er rett.
- b) B. Siden spenningsforsyningen er frakopla endres ikke ladningen Q . Kapasitansen $C = Q/V$ øker med en faktor 5,0: $C = 5C_0$, dermed avtar spenningen med en faktor 5 og energien $U = \frac{1}{2}QV$ reduseres også med en faktor 5. (En kraft vil virke på materialet som trekker det inn i mellomrommet.)
- c) E. $Q = CV = \epsilon_r \epsilon_0 A/d \cdot V$. Spenningen er konstant 100 V og permittiviteten øker, derfor øker Q .
- d) E. Det er ingen kraft på magnetisk materiale i homogent magnetisk felt. Forreften er også dreiemomentet $\tau = \vec{\mu} \times \vec{B} = 0$ fordi magnetisk moment $\vec{\mu}$ er parallelt med B -feltet (men det var det ikke spørsmål etter).
- e) C. Faradays lov: $\mathcal{E} = -\frac{\partial \Phi_B}{\partial t} = -\frac{\partial (BA \cos \theta)}{\partial t} = BA \sin \theta \cdot \frac{\partial \theta}{\partial t} = BA \sin \theta \cdot \omega$ der B er magnetfelt, A areal av strømsløyfa og ω rotasjonshastigheten. Sinusfunksjon representert ved kurve 3.
- f) C. Ladningene i ledningen påvirkes av en kraft $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$. Denne er null bare når $\vec{v}$ og $\vec{B}$ er parallell (forutsatt $\vec{v}$ eller $\vec{B}$ ikke er null).
- g) D. Lysstyrke prop. med effekt $P = UI = U^2/R$. Størst spenning gir størst lysstyrke. Når pære 2 skrus ut dobles motstanden i høyre del og spenningen øker. Dermed øker lysstyrken for pære 3. Kan også sette opp uttrykk.
- h) B. Sirkelbevegelsen forårsakes av Lorentzkraften, så vi må ha $evB_0 = m_e v^2/r$, med $v = |\vec{v}| = \sqrt{2}v_0$. Dermed er $r = \sqrt{2}m_e v_0/eB_0$.
- i) D. I er vanlig (lednings)strøm, mens andre leddet representerer forskyvningsstrømmen (pga. endring i elektrisk fluks Φ_E). Dimensjonsmessig ser vi lett at vi må dividere bort μ_0 for å få strøm.
- j) A. Det oppgitte potensialet betyr at det elektriske feltet er $\vec{E}_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \hat{j} = -kV_0 \hat{j}$ slik at energien per volumenhet er $u = \epsilon_0 E^2/2 = \epsilon_0 k^2 V_0^2/2$. Det oppgitte området har volum $(\pi/k)^3$, slik at den elektriske energien i dette området blir $U = u (\pi/k)^3 = \epsilon_0 V_0^2 \pi^3/2k$.

Oppgave 2. Elektrostatikk.

a) P.g.a. sylindersymmetri kan $\vec{E}$ kun ha radiell komponent, som betyr den kan skrives $\vec{E} = E_r \hat{r}$. All ladning legger seg på yttersida av innerlederen og innerside av ytterlederen. Vi bruker Gauss' lov for en sylinder med radius r og lengde ℓ : $\oint \epsilon_0 \vec{E} \cdot d\vec{A} = Q_{\text{encl}}$. På endeflatene er $\vec{E} \parallel d\vec{A}$ og på sylinderflata er $\vec{E}$ konstant og normal på flata med totalt areal $2\pi r\ell$ som da gir

$$\epsilon_0 E_r \cdot 2\pi r\ell = \begin{cases} 0 & r < a \\ \lambda \ell & r \in [a, b] \\ 0 & r > b \end{cases} \quad \text{altså kan vi skrive } \vec{E} = \frac{\vec{E}_0}{r}, \quad \text{der} \quad \vec{E}_0 = \begin{cases} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \hat{r} & r \in [a, b] \\ \vec{0} & \text{ellers} \end{cases}$$

b) Fra definisjon av elektrisk potensial:

$$V(a) - V(b) = - \int_b^a \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \int_b^a \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \cdot dr = - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \cdot \ln \frac{a}{b} = E_0 \cdot \ln \frac{b}{a},$$

der vi har integrert radielt slik at $d\vec{s} = \hat{r} dr$.

Nå er $V(b) = 0$ og idet $b > a$ og $\lambda > 0$ får vi at $V(a) > 0$. Et positivt ladd legeme har alltid høyere potensial enn et negativt.

c) Uttrykk for elektrostatisk energitetthet (energi per volum):

$$u = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2.$$

Totalenergien finnes ved å integrere over sylindervolumet mellom $r = a$ og $r = b$ (der $E = E_0/r \neq 0$), med infinitesimalt sylindervolum $dV = 2\pi r dr \cdot \ell$. (Det er brukt W i oppgaveteksten, men bruker her U som er brukt for el.statisk energi på formelarket.)

$$W = U = \int_{\text{syl}} u dV = \int_{\text{syl}} \frac{1}{2} \epsilon_0 \left(\frac{E_0}{r} \right)^2 \cdot 2\pi r dr \cdot \ell = \pi \epsilon_0 \ell E_0^2 \cdot \int_a^b \frac{dr}{r} = \pi \epsilon_0 \ell E_0^2 \cdot \ln \frac{b}{a}.$$

Per lengdeenhet og innsatt E_0 :

$$W' = U' = \frac{U}{\ell} = \pi \epsilon_0 \left(\frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0} \right)^2 \cdot \ln \frac{b}{a} = \frac{\lambda^2}{4\pi \epsilon_0} \cdot \ln \frac{b}{a} \quad \left(= E_0^2 \cdot \pi \epsilon_0 \cdot \ln \frac{b}{a} \right).$$

Alternativt kan oppgaven løses ved å integrere over ladning, $U = \int \frac{1}{2} V \cdot dq$. Det er ladning kun ved flatene $r = a$ og $r = b$, og dessuten er potensialet ved b lik null: $V(b) = 0$, slik at energi per lengdeenhet blir

$$U' = \frac{U}{\ell} = \frac{1}{2\ell} [V(a) \cdot \lambda \ell + V(b)(-\lambda) \ell] = \frac{1}{2} V(a) \cdot \lambda = \frac{\lambda^2}{4\pi \epsilon_0} \ln \frac{b}{a}.$$

Man må da altså ha funnet svaret på $V(a)$ i punktet ovenfor.

d) Enkleste måte å finne feltstyrken på er å bruke gradienten iylinderkoordinater (ingen ϕ og z -avhengighet):

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V = -\frac{\partial}{\partial r} \left(V_0 \frac{b-r}{b-a} \right) \hat{r} = V_0 \cdot \frac{1}{b-a} \cdot \hat{r}.$$

Romladningen finnes enklest fra $\rho = \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$. Med divergens for sylinderkoordinater får man

$$\rho(r) = \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \left(V_0 \cdot \frac{1}{b-a} \cdot \hat{r} \right) = \epsilon_0 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{V_0}{b-a} \right) = \frac{\epsilon_0 V_0}{r(b-a)}.$$

Dette gjelder $r \in [a, b]$. Utenfor er $\rho = 0$.

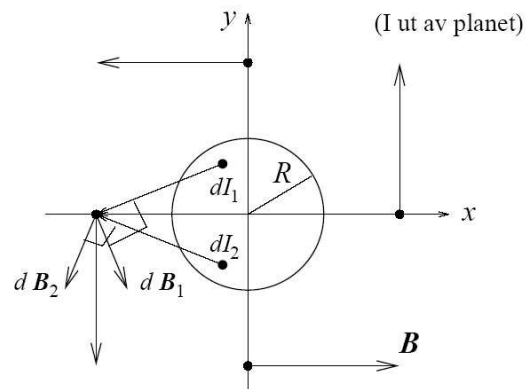
Oppgave 3. Magnetfelt

a) Total strøm i lederen finner vi ved å integrere strømtettheten $\vec{J}(r)$ over tverrsnittet av lederen. Arealelement normalt på strømretningen blir $dA = 2\pi r dr$, og da J varierer med r må vi integrere:

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_{\text{tverrsnitt}} \vec{J} \cdot d\vec{A} = \int_0^R J(r) \cdot 2\pi r dr \\ &= 2\pi J_0 \int_0^R \left(r - \frac{r^2}{R} \right) \cdot dr = 2\pi J_0 \left(\frac{1}{2} R^2 - \frac{1}{3} \frac{R^3}{R} \right) = \frac{\pi}{3} J_0 R^2. \end{aligned}$$

b) Retningen på magnetfeltet $\vec{B}$ fra en lang, rett strømførende leder (med sylinder-symmetrisk strømtetthet $\vec{J}$) blir overalt tangentielt til sirkler konsentriske med lederens symmetriakse. Med andre ord, feltlinjene for $\vec{B}$ blir nettopp slike konsentriske sirkler. I Figuren er $\vec{B}$ tegnet inn i de fire angitte punktene.

I figuren er det også vist hvordan to symmetrisk beliggende "strømelementer" dI_1 og dI_2 tilsammen gir et magnetfelt $d\vec{B}_1 + d\vec{B}_2$ på den mellomliggende symmetriaksen (her: x -aksen) med nevnte tangentielle retning. Følgelig må det totale feltet også ha en slik retning. Dette symmetriargumentet vil gjelde like bra både inne i og utenfor lederen, slik at dette blir retningen på $\vec{B}$ overalt. (Her var det ikke påkrevd med noe symmetriargumentasjon. Fire like lange, tangentielle vektorer i figuren er alt som skal til for å besvare oppgaven.)



c) Med tangentiell $\vec{B}$ overalt, og $B = |\vec{B}|$ kun avhengig av avstanden fra lederens senterakse, er det naturlig å velge “amperekurver” som sirkler med radius r , konsentriske med lederen. Amperes lov gir da

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I_{\text{encl}} \quad \Rightarrow \quad B_u(r) \cdot 2\pi r = \mu_0 I(r)$$

der $I(r)$ er strømmen som passerer innenfor (dvs., som er omsluttet av) sirkelen med radius r .

Utenfor lederen er $I(r)$ som funnet i a) konstant for alle r :

$$I(r > R) = I_0 = \frac{\pi}{3} J_0 R^2,$$

som gir magnetfeltet for $r > R$:

$$\underline{B_u(r)} = \frac{\mu_0}{2\pi r} \cdot I_0 = \frac{\mu_0}{2\pi r} \frac{\pi}{3} J_0 R^2 = \underline{\mu_0 J_0 \frac{R^2}{6r}}.$$

d) Inni lederen finner vi

$$\begin{aligned} I(r < R) &= \int_0^r J(r') \cdot 2\pi r' dr' \\ &= 2\pi J_0 \int_0^r \left(r' - \frac{r'^2}{R} \right) \cdot dr' = 2\pi J_0 \left(\frac{1}{2} r^2 - \frac{1}{3} \frac{r^3}{R} \right) = \pi J_0 r^2 \left(1 - \frac{2r}{3R} \right). \end{aligned}$$

(Ser at uttrykket for $r = R$ stemmer med resultatet i a).) Fra Amperes lov (som gitt for B_u ovenfor) blir magnetfeltet inni lederen

$$B_i(r) = \frac{\mu_0}{2\pi r} \cdot I(r < R) = \frac{\mu_0}{2\pi r} \pi J_0 r^2 \left(1 - \frac{2r}{3R} \right) = \frac{\mu_0 J_0}{2} r - \frac{\mu_0 J_0}{3R} r^2$$

Altså er

$$C_1 = \frac{1}{2} \mu_0 J_0 = \frac{1}{2} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m} \cdot 5,00 \cdot 10^4 \text{ A/m}^2 = \underline{0,0314 \text{ T/m}}.$$

og

$$C_2 = -\frac{\mu_0 J_0}{3R} = -\frac{4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m} \cdot 5,00 \cdot 10^4 \text{ A/m}^2}{3 \cdot 1,00 \cdot 10^{-2} \text{ m}} = \underline{-2,09 \text{ T/m}^2}.$$

(Enhet: H/m = Tm/A)

Oppgave 4. Kretser

a) I en krets der alle strømmer er konstante (dvs tidsuavhengige), representerer en induktans L rett og slett en kortslutning, mens en kapasitans C representerer en åpen krets. Vi står da essensielt igjen med en seriekobling av 3 motstander R , altså en total motstand $3R$, slik at strømstyrken blir

$$\underline{I = \frac{V_0}{3R} = 0,25 \text{ mA}}.$$

Med induktanser L erstattet av kortslutninger ser vi at det blir null spenningsfall over kondensatorene 3 og 4 slik at $\underline{Q_3 = Q_4 = 0}$. Spenningsfallet over kondensator 1 og 2 blir lik spenningsfallet over de parallelle resistanser:

$$V_1 = I \cdot 2R = 2/3 V_0 = 1,00 \text{ kV}, \quad V_2 = I \cdot R = V_0/3 = 0,50 \text{ kV}.$$

Dermed:

$$\underline{Q_1 = C_1 V_1 = 2,0 \mu\text{C}, \quad Q_2 = C_2 V_2 = 1,0 \mu\text{C}}.$$

b) Kirchhoffs strømregel gir

$$I = I_R + I_L.$$

der I er den totale strømmen I , I_R strøm gjennom motstanden og I_L gjennom induktansen. Kirchhoffs spenningsregel på høyre krets gir at den påtrykte spenningen $V(t)$ er lik både spenningen over motstanden og spenningen over induktansen:

$$\begin{aligned} V_0 e^{i\omega t} &= V_R = R I_R \\ V_0 e^{i\omega t} &= V_L = L \frac{dI_L}{dt} \end{aligned}$$

Disse ligningene løses greit, og vi finner

$$\begin{aligned} I_R &= \frac{V_0}{R} e^{i\omega t} \\ I_L &= \frac{V_0}{L} \int e^{i\omega t} dt = \frac{V_0}{i\omega L} e^{i\omega t}. \end{aligned}$$

Total strøm levert av spenningskilden blir dermed

$$I(t) = I_R(t) + I_L(t) = V_0 \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{i\omega L} \right) e^{i\omega t}.$$

Strømamplituden er dermed

$$I_0 = V_0 \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{i\omega L} \right) = V_0 \left(\frac{1}{R} - i \frac{1}{\omega L} \right)$$

Denne kan skrives på polar form:

$$I_0 = |I_0| e^{i\alpha}$$

med

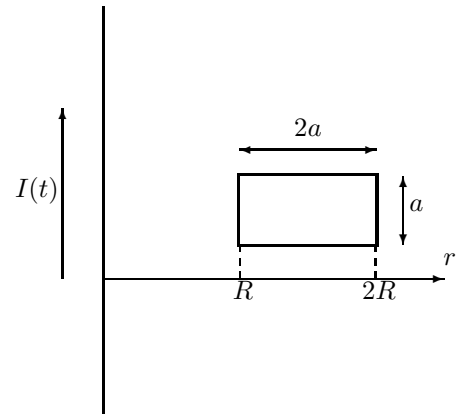
$$|I_0| = V_0 \left(\frac{1}{R^2} + \frac{1}{(\omega L)^2} \right)^{1/2} \quad \text{og} \quad \alpha = \arctan \frac{\frac{1}{R}}{-\frac{1}{\omega L}} = -\arctan \frac{R}{\omega L}$$

Strømmen er altså faseforskjøvet en vinkel $\arctan \frac{R}{\omega L}$ foran spenningen.

Oppgave 5. Induksjon

Magnetfeltet $B(r, t)$ fra den rette strømførende lederen resulterer i en magnetisk fluks $\Phi_B(t)$ innenfor den rektangulære strømsløyfa. Feltet $B(r)$ avtar med avstand r fra lederens senterakse men er ikke avhengig av z (retning langs leder), slik at vi må integrere med arealelementet $dA = a \, dr$. Når I er positiv (oppover) har magnetfeltet $\vec{B}$ innenfor strømsløyfa retning normalt ned i papirplanet. Det er naturlig å definere *positiv retning opp* av papirplanet slik at den magnetiske fluksen blir negativ og uttrykt

$$\Phi_B(t) = \int_{\text{rektangel}} \vec{B} \cdot d\vec{A} = - \int_R^{2R} \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I(t)}{r} a \, dr = -\frac{\mu_0}{2\pi} I(t) a \cdot \ln \frac{2R}{R}$$



Med den oppgitte $I(t)$ finner vi at den induserte ems. i ledersløyfa blir

$$\mathcal{E}(t) = -\frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{dI(t)}{dt} a \cdot \ln 2 = \frac{\mu_0}{2\pi} (-\omega I_0 \sin \omega t) a \cdot \ln 2 = -\frac{\mu_0}{2\pi} \omega I_0 a \cdot \ln 2 \cdot \sin \omega t.$$

Med *positiv retning* definert som over blir $\mathcal{E}$ positiv når den gir en indusert strøm mot klokka (høyrehåndsregel, tommel positiv retning opp av papirplanet).