Eksamen 24. mai 2011. Løsningsforslag

Oppgave 1. Flervalgsspørsmål

Oppgave:	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k
Rett svar:	A	D	E	A	C	B	D	E	A	D	B

Detaljer om spørsmålene:

a) A. Mellom Q_1 og Q_2 må feltene gå i samme retning og kan ikke nulles ut. Utenfor ladningene går feltene i motsatt retning. Pkt. 5 er nærmere den sterkere Q_2 enn Q_1 og feltet kan ikke nulles ut. På venstre side er avstanden fra den sterkere Q_2 større enn Q_1 og feltene kan nulles ut. Når det er gitt at et av punktene er feltet lik null, må det være i punkt 1.

b) D. All ladning fordeles ut til det ytre av ledersystemet, som altså er på utsida av metallskallet. Metallkula får null ladning.

c) E. $Q = CV = \epsilon_{\mathrm{r}}\epsilon_0 A/d \cdot V$. Spenningen er konstant 100 V og permittiviteten øker, derfor øker Q.

d) A. Fra tips: Kravet $\oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = 0$ på kvadratet er oppfylt kun for A. F.eks. for B får vi et positivt bidrag på høyre sidekant som ikke oppveies av venstre sidekant. Tilsvarende for C, D og E.
Alternativ fra kravet om curlfritt $\vec{E}$-felt: $\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}$ som når $E_y = 0$ og $\frac{\partial}{\partial y} = 0$ gir $\left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{j}} = \vec{0}$. $\frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial E_x}{\partial z}$ er oppfylt bare for A.

e) C. Ladningene på samme linja som P vil gi netto null E. De to andre gir like stort bidrag i retning henholdsvis opp til høyre og ned til høyre. Resultantfelt blir da horisontalt mot høyre, vist med $\vec{3}$.

f) B. E-feltet rundt hver pkt.ladning er $E(r = a) = kQ/a^2$. Potensialet relativt ∞ rundt hver pkt.ladning er $V(r = a) = kQ/a$. Med to positive og to negative ladninger i samme avstand er $E = 0$ og $V = 0$ i P.

g) D. Strømampl. i L avtar lineært med frekvens: $I_L = V_0/Z_L = V_0/j\omega L$. Strømampl. i C øker lineært med frekvens: $I_C = V_0/Z_C = V_0 \cdot i\omega C$. Totalstrømmen $I = I_L + I_C$ må da ha et minimum. Man kan beregne uttrykk for kompleks impedans om man ønsker: $Z = i\omega L//(1/i\omega C) = \frac{i\omega L}{1-\omega^2 LC}$. Gir $I = V_0/Z$ min. for $\omega^2 = 1/(LC)$.

h) E. Retningen på magnetfeltet rundt den vertikale lederen er asimutalt i et horisontalt plan. Krafta på den horisontale lederen er null i det nærmeste punktet, og for alle andre punkter vil krafta på to punkter like langt fra dette midtpunktet kansellere med like stor i hver retning. Det vil derimot være et netto dreiemoment på lederen.

i) A. $B = \mu H = (1 + \chi)H$ der χ er magn. susceptibilitet. Når B faller med $0,005\,\%$ når I og dermed H er konstant, er $\chi = -5 \cdot 10^{-5}$.

j) D. Hastighetskomponenten $v_0\,\hat{\mathbf{k}}$ parallelt med $\vec{B}$ forblir uendra (Lorentzkrafta $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$) mens hastighetskomponenten $v_0\,\hat{\mathbf{j}}$ normalt på $\vec{B}$ gir en sirkelbevegelse med uendra banefart v_0. Ifølge Lorentzkrafta og sentripetalkraft: $qv_0B_0 = m_e v_0^2/r$, som gir $r = m_e v_0/eB_0$. Konstant stigning pluss sirkel er en heliksbevegelse.

k) B. Netto magnetisk fluks gjennom en lukket overflate er alltid lik null.

Oppgave 2. Dielektrikum.

a) Siden det er samme strøm ut som inn er $\underline{Q_3 = -Q_1 = -It_0}$. Plate 2 sin side mot a får ladning $-Q_1$ (negativ) og mot side b $-Q_3$ (positiv), totalt (netto) $\underline{Q_2 = -Q_1 - Q_3 = -It_0 + It_0 = 0}$.

b) Inni elektrisk ledere er $E = 0$ og $D = 0$. Mellom leder 1 og 2 samt mellom 2 og 3 må $\vec{D}$ ha retning fra positiv til negativ ladning, dvs. $\vec{D}_{\mathrm{a}} = D_{\mathrm{a}}\,\hat{\mathbf{i}}$ og $\vec{D}_{\mathrm{b}} = D_{\mathrm{b}}\,\hat{\mathbf{i}}$. Legger inn Gaussflate med sidekanter langs sideveggene og endeflater parallell med lederflatene:

$$\oint_S \vec{D}\mathrm{d}\vec{A} = Q.$$

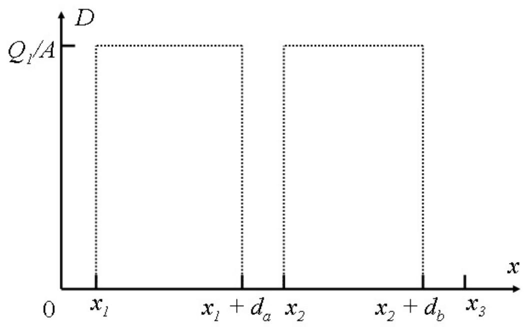
Gaussflate med én endeflate i plate 1 og én endeflate i område a gir:
$0 + D_{\mathrm{a}}\,\hat{\mathbf{i}} \cdot A\,\hat{\mathbf{i}} = Q_1 \quad \Rightarrow \quad \underline{D_{\mathrm{a}} = Q_1/A = It_0/A}.$

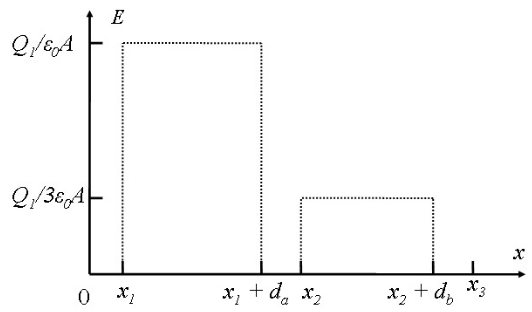
Gaussflate med én endeflate i område b og én endeflate i plate 3:

$0 + D_\mathrm{b}\,\hat{\mathbf{i}} \cdot (-A\,\hat{\mathbf{i}}\,) = Q_3 \quad \Rightarrow \quad \underline{D_\mathrm{b} = -Q_3/A = Q_1/A = It_0/A}.$

$\vec{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E}$ gir for $\vec{E}$:

$$\vec{E}_\mathrm{a} = \frac{\vec{D}_\mathrm{a}}{\epsilon_0} = \underline{\frac{Q_1}{\epsilon_0 A}\,\hat{\mathbf{i}}} \quad \text{og} \quad \vec{E}_\mathrm{b} = \frac{\vec{D}_\mathrm{b}}{3\epsilon_0} = \underline{\frac{Q_1}{3\epsilon_0 A}\,\hat{\mathbf{i}}}\,.$$





c)

$$V_{13} = V_1 - V_3 = -\int_3^1 \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = E_\mathrm{a} d_\mathrm{a} + E_\mathrm{b} d_\mathrm{b} = \underline{\frac{Q_1}{\epsilon_0 A}\,(d_\mathrm{a} + d_\mathrm{b}/3)}.$$

$$C = \frac{Q_1}{V_{13}} = \underline{\epsilon_0 \frac{A}{d_\mathrm{a} + d_\mathrm{b}/3}}\,.$$

d) Polariseringen P er gitt ved $D = \epsilon_0 E + P$, som gir $P = D - \epsilon_0 E = (\epsilon - \epsilon_0)E$.

$$\underline{P_\mathrm{a} = (\epsilon_0 - \epsilon_0)E_\mathrm{a} = 0} \qquad \text{og} \quad \underline{P_\mathrm{b}} = (3\epsilon_0 - \epsilon_0)E_\mathrm{b} = 2\epsilon_0 \frac{Q_1}{3\epsilon_0 A} = \underline{\frac{2}{3}\frac{Q_1}{A}}\,.$$

(Retningen som D, men ikke spurt etter vektorstørrelse.)

e) For $t < t_0$ er fra pkt a) og b)

$$D_\mathrm{b}(t) = D_\mathrm{a}(t) = Q_1(t)/A = It/A$$

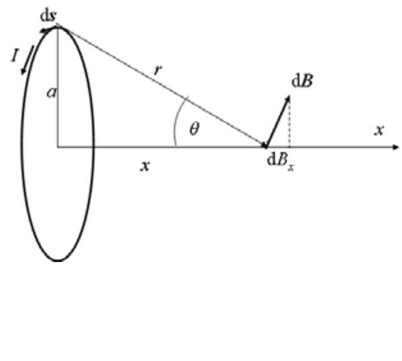
Da er forskyvningsstrøm i medium a og medium b like og kan uttrykkes

$$\underline{I_\mathrm{b} = I_\mathrm{a}} = \int\!\!\int \frac{\partial \vec{D}_\mathrm{a}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = \frac{\partial D_\mathrm{a}(t)}{\partial t} A = \frac{I}{A} A = \underline{I}\,.$$

Oppgave 3. Magnetisk induksjon

a) Biot-Savart:

$$\mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\,\frac{\mathrm{d}\vec{s}\times\vec{r}}{r^3}$$



med $\mathrm{d}\vec{s}$ langs sirkelen og $r^2 = a^2 + x^2$. Siden $\mathrm{d}\vec{s} \perp \vec{r}$ vil $\mathrm{d}\vec{B}$ ha størrelse

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\,\frac{\mathrm{d}s}{r^2} \quad \text{og} \quad \mathrm{d}B_x = \mathrm{d}B\cdot\sin\theta = \mathrm{d}B\cdot a/r\,,$$

mens de andre komponentene blir null når vi integrerer rundt sirkelen. Integrasjon over hele sirkelsløyfa gir

$$B_x = \oint \mathrm{d}B_x = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint \frac{\mathrm{d}s}{r^2}\,\frac{a}{r}$$

og idet r er konstant under integrasjonen og $\oint \mathrm{d}s = 2\pi a$, får vi

$$\vec{B} = B_x\,\hat{\mathbf{i}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\,2\pi a\,\frac{a}{r^3}\,\hat{\mathbf{i}} = \underline{\frac{\mu_0 I}{2}\,\frac{a^2}{(x^2+a^2)^{3/2}}\,\hat{\mathbf{i}}}\,.$$

som skulle vises.

b) Fluks gjennom den andre sløyfa p.g.a. strømmen i den første:

$$\Phi_{12} = B_x \pi b^2 = \frac{\mu_0 I_1}{2}\,\frac{a^2}{(x^2+a^2)^{3/2}}\pi b^2 \;\approx\; \frac{\mu_0 I_1}{2}\,\frac{a^2}{x^3}\pi b^2$$

der vi har brukt resultatet i a) og tilnærmet idet $a \ll x$.

Indusert ems. er gitt ved Faradays lov og definisjon gjensidig induktans M (formelark):

$$\mathcal{E} = -\dot{\Phi}_{12} \overset{\text{def}}{=} -M\,\dot{I}_1 \qquad \Rightarrow \qquad \underline{M = \frac{\dot{\Phi}_{12}}{\dot{I}_1} = \frac{\mu_0}{2}\frac{a^2}{x^3}\pi b^2}\,.$$

c) Når den andre sløyfa roterer vil magnetisk fluks gjennom sløyfa variere med $\cos\omega t$:

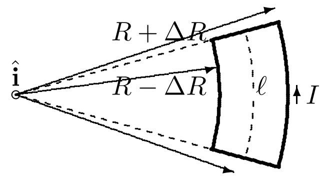
$$\mathcal{E}_2 = -\dot{\Phi}_{12} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(B_x \pi b^2 \cdot \cos\omega t\right) = -B_x\pi b^2 \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\cos\omega t) = B_x \pi b^2 \cdot \omega \sin\omega t$$

Innsatt B_x fra b) ovenfor og evt. også M fra b), får vi

$$\underline{\mathcal{E}_2 = \frac{\mu_0 I_1}{2}\frac{a^2}{x^3}\pi b^2 \cdot \omega \sin\omega t} \;=\; \underline{M \cdot I_1 \omega \sin\omega t}\,.$$

Oppgave 4. Magnetfelt

Feltet i origo er sum av bidrag fra hver del av sirkelen, mens de to rette lederbitene ikke gir noe bidrag til B i origo da her $I\mathrm{d}s \| \vec{r}$ i Biot-Savarts lov. For sirkelbuene er det snakk om feltet i sentrum, dvs. vi kan bruke resultatet i pkt. a) med $x = 0$:



$$B_x = \frac{\mu_0 I}{2}\frac{a^2}{a^3} = \frac{\mu_0 I}{2}\frac{1}{a}$$

og med $a = R - \Delta R$ og $a = R + \Delta R$ for henholdsvis indre og ytre sirkelbue. Ytre sirkelbue gir B i $\hat{\mathbf{i}}$-retning, indre B i -$\hat{\mathbf{i}}$-retning. Hver bue utgjør en andel $\dfrac{\ell}{2\pi R}$ av en hel sirkel. Dermed blir totalfeltet lik

$$B_x = \frac{\ell}{2\pi R}\cdot\frac{\mu_0 I}{2}\left(\frac{1}{R+\Delta R} - \frac{1}{R-\Delta R}\right) = \frac{\ell}{2\pi R}\cdot\frac{\mu_0 I}{2}\,\frac{R-\Delta R - R - \Delta R}{(R-\Delta R)(R+\Delta R)} = \frac{\ell}{2\pi R}\cdot\frac{\mu_0 I}{2}\cdot\frac{-2\Delta R}{R^2 - (\Delta R)^2}\,.$$

Som med $\Delta R \ll R$ gir

$$\underline{\vec{B} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi R}\cdot\frac{\ell\,\Delta R}{R^2}\,\hat{\mathbf{i}}}\,.$$

Arealet av strømsløyfesegmentet er $A = \ell\cdot 2\Delta R$, slik at magnetisk dipolmoment er $\underline{\vec{\mu} = IA\,\hat{\mathbf{i}} = I\,2\ell\,\Delta R\,\hat{\mathbf{i}}}$. Antakelsen $\ell \ll R$ trengte vi ikke i besvarelsen.

Arealet kan evt. beregnes:

$$A = \frac{\ell}{2\pi R}\left(\pi(R+\Delta R)^2 - \pi(R-\Delta R)^2\right) = \frac{\ell}{2R}\left(R^2 + 2R\Delta R + (\Delta R)^2 - (R^2 - 2R\Delta R + (\Delta R)^2\right) = \frac{\ell}{2R}(4R\Delta R) = 2\ell\Delta R$$

Alternativt til å nytte resultatet i a) er å bruke Biot-Savart. For ytre bue med lengde $\ell_2 = \ell\cdot\frac{R+\Delta R}{R}$ og radius $r_2 = R + \Delta R$ får vi

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_0^{\ell_2}\frac{\mathrm{d}\vec{s}\times\vec{r}}{r_2^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_0^{\ell_2}\frac{\mathrm{d}s\,r}{r_2^3}\,\hat{\mathbf{i}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\ell_2}{r_2^2}\,\hat{\mathbf{i}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}\frac{\ell}{R+\Delta R}\,\hat{\mathbf{i}}\,,$$

der $\vec{r}$ peker mot sentrum og alltid $\perp$ $\mathrm{d}\vec{s}$. Tilsvarende for indre bue med $R - \Delta R$, og totalt:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}\frac{\ell}{R+\Delta R}\,\hat{\mathbf{i}} + \frac{\mu_0 I\ell}{4\pi R}\frac{\ell}{R-\Delta R}(-\,\hat{\mathbf{i}}\,) = \frac{\mu_0 I\ell}{4\pi R}\left(\frac{1}{R+\Delta R} - \frac{1}{R-\Delta R}\right)\hat{\mathbf{i}}$$

osv. som over.

Oppgave 5. Elektrostatisk energi

E-feltet mellom kuleskallene er gitt ved $E(r) = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\cdot\dfrac{Q}{r^2}$, ellers null. Potensiell energi per volumenhet er

$$u = \frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E} = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 = \frac{1}{2}\epsilon_0\cdot\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right)^2\cdot\frac{Q^2}{r^4}\,.$$

Med volum $\mathrm{d}\tau = 4\pi r^2\mathrm{d}r$ for kuleskall integrerer vi opp total potensiell energi:

$$U = \int_a^b u\cdot 4\pi r^2\mathrm{d}r = \frac{1}{2}\int_a^b\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{Q^2}{r^2}\mathrm{d}r = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0}\cdot\left[-\frac{1}{r}\right]_a^b = \underline{\frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right) = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0}\frac{b-a}{ab}}\,.$$

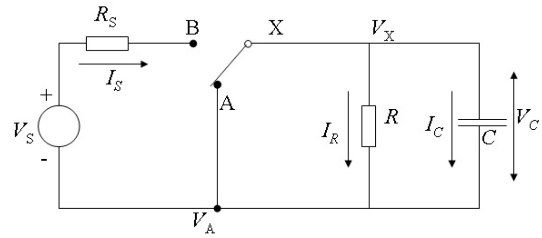
Alternativt kan energien beregnes fra potensialet mellom kuleskallene

$$V_a - V_b = -\int_b^a E(r)\mathrm{d}r = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\int_b^a \frac{1}{r^2}\mathrm{d}r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$$

og energiuttrykket (i ferdig oppbygd ladning):

$$U = \frac{1}{2}Q_aV_a + \frac{1}{2}Q_bV_b = \frac{1}{2}Q(V_a - V_b) = \underline{\frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)}.$$

Oppgave 6. Kretser



a) Ved $t = 0^+$:

i) $\underline{V_C = 0}$ fordi kondensatoren har V_C=0 ved $t \le 0$, og spenningen $V_C = Q_C/C$ over kondensatoren kan ikke endres brått.

ii) $\underline{I_R = 0}$ fordi spenningen over R er lik spenningen over C (parallellkopling), slik at $I_R = V_R/R = 0$.

iii) $\underline{I_S} = \dfrac{V_S - V_C}{R_S} = \dfrac{10\,\mathrm{V} - 0\,\mathrm{V}}{10,0\,\Omega} = \underline{1,00\,\mathrm{A}}$.

iv) Kondensatoren er ladet opp til konstant V_C slik at $I_C = 0$. Da er det bare motstandene som bestemmer V_C. Strømmen gjennom både R_S og R blir $I_S = \dfrac{V_S}{R_S + R}$ og dermed

$$\underline{V_C} = I_S \cdot R = V_S\frac{R}{R_S + R} = 10,0\,\mathrm{V}\cdot\frac{100}{10+100} = \underline{9,1\,\mathrm{V}}.$$

b) Spenning over kondensatoren er lik V_X, altså $V_\mathrm{X} = V_C = Q_C/C$.

i) Knutepunktlikning for øvre knutepunkt (pkt X): $\underline{I_S = I_R + I_C}$.

ii) Vi ser fra kretsen: $I_R = V_X/R$, $I_S = (V_S - V_X)/R_S$ og kondensatorstrømmen $I_C = \dot{Q}_C = C\dot{V}_C = C\dot{V}_X$. Knutepunktlikningen gir

$$\frac{V_S - V_X}{R_S} = \frac{V_X}{R} + C\,\dot{V}_X$$

og med enkel omforming

$$\underline{C\,\frac{R_S\,R}{R_S+R}\dot{V}_X + V_X = V_S\,\frac{R_S\,R}{R_S(R_S+R)}}\,.$$

Altså er tidskonstant $= \underline{\tau = C\,\dfrac{R_S\,R}{R_S+R}} = 1,00\,\mu\mathrm{F}\cdot\dfrac{10\cdot 100}{10+100}\Omega = \underline{9,1\,\mu\mathrm{s}}$ og $\underline{\gamma = \dfrac{R}{R_S+R} = \dfrac{100}{10+100} = 0,91}$.

A.Mi. 30. mai -11.