

Eks. 15. aug. 2011 Løsningsforslag.**Oppgave 1. Flervalgsspørsmål**

Oppgave:	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
Rett svar:	B	E	D	E	C	D	D	B	A	D

Detaljer om noen av spørsmålene:

- a) B. Siden spenningsforsyningen er frakopla endres ikke ladningen Q . Kapasitansen $C = Q/V$ øker med en faktor 5,0: $C = 5C_0$, dermed avtar spenningen med en faktor 5 og energien $U = \frac{1}{2}QV$ reduseres også med en faktor 5. (En kraft vil virke på materialet som trekker det inn i mellomrommet.)
- b) E. $Q = CV = \epsilon_r \epsilon_0 A/d \cdot V$. Spenningen er konstant 100 V og permittiviteten øker, derfor øker Q .
- c) D. Begge har potensial $V(R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$ på overflata. For kule 1 er all ladning ved dette potensial og $U = \frac{1}{2}V(R)Q$. For kule 2 er ladningen fordelt på gradvis stigende potensial innover i kula, den må derfor ha høyere totalenergi $U = \int_{\text{kule}} \frac{1}{2}V(r)dq$. Kun C er da mulig svar: A: $1/8 > 1/20$ B: $1/8 > 1/10$ C: $1/8 < 3/20$ D: $1/8 > 3/40$ E: $1/8 = 1/8$. Trenger altså ikke gjøre vidløftige utregninger.
- d) E. Det er ingen kraft på magnetisk materiale i homogent magnetisk felt. Forreften er også dreiemomentet $\tau = \vec{\mu} \times \vec{B} = 0$ fordi magnetisk moment $\vec{\mu}$ er parallelt med B -feltet (men det var det ikke spørsmål etter).
- e) C. Faradays lov: $\mathcal{E} = -\frac{\partial \Phi_B}{\partial t} = -\frac{\partial (BA \cos \theta)}{\partial t} = BA \sin \theta \cdot \frac{\partial \theta}{\partial t} = BA \sin \theta \cdot \omega$ der B er magnetfelt, A areal av strømsløyfa og ω rotasjonshastigheten. Sinusfunksjon representert ved kurve 3.
- f) D. Hastighetskomponenten $v_0 \hat{j}$ parallelt med $\vec{B}$ forblir uendra (Lorentzkrafta $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$) mens hastighetskomponenten $v_0 \hat{i}$ normalt på $\vec{B}$ gir en sirkelbevegelse med uendra banefart v_0 . Ifølge Lorentzkrafta og sentripetalkraft: $qv_0 B_0 = m_e v_0^2 / r$, som gir $r = m_e v_0 / e B_0$. Konstant stigning pluss sirkel er en heliksbevegelse.
- g) D. I er vanlig (lednings)strøm, mens andre leddet representerer forskyvningsstrømmen (pga. endring i elektrisk fluks Φ_E). Dimensjonsmessig ser vi lett at vi må dividere bort μ_0 for å få strøm.
- h) B. Magntefeltlinjer løper ut fra N-pol og inn mot S-pol. Når magneten beveger seg mot ringen øker magnetfluksen i retning venstre, og for å motveie dette (Lenz' lov) settes det opp en strøm ifølge høyrehåndsregelen som går i angitt retning. Altså B rett.
- i) A. Lysstyrke prop. med effekt $P = UI = U^2/R$. Størst spenning gir størst lysstyrke. Når pære 2 skrur ut dobles motstanden i høyre del og spenningen øker. Dermed øker lysstyrken for pære 3. Kan også sette opp uttrykk.
- j) D. Strøampl. i L avtar lineært med frekvens: $I_L = V_0/Z_L = V_0/j\omega L$. Strøampl. i C øker lineært med frekvens: $I_C = V_0/Z_C = V_0 \cdot i\omega C$. Totalstrømmen i parallellkretsen er $I = I_L + I_C$ og må dermed ha et minimum. Man kan beregne uttrykk for kompleks impedans om man ønsker: $Z = i\omega L / (1/i\omega C) = \frac{i\omega L}{1-\omega^2 LC}$. Gir $I = V_0/Z$ min. for $\omega^2 = 1/(LC)$.

Oppgave 2. Elektrostatikk.

- a) P.g.a. sylindersymmetri kan $\vec{E}$ kun ha radiell komponent, som betyr den kan skrives $\vec{E} = E_r \hat{r}$. All ladning legger seg på yttersida av innerlederen og innerside av ytterlederen. Vi bruker Gauss' lov for en sylinder med radius r og lengde ℓ : $\oint \epsilon_0 \vec{E} \cdot d\vec{A} = Q_{\text{encl}}$. På endeflatene er $\vec{E} \parallel d\vec{A}$ og på sylinderflata er $\vec{E}$ konstant og normal på flata med totalt areal $2\pi r\ell$ som da gir

$$\epsilon_0 E_r \cdot 2\pi r\ell = \begin{cases} 0 & r < a \\ \lambda \ell & r \in [a, b] \\ 0 & r > b \end{cases} \quad \text{altså kan vi skrive } \vec{E} = \frac{\vec{A}}{r}, \quad \text{der} \quad \vec{A} = \begin{cases} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \hat{r} & r \in [a, b] \\ \vec{0} & \text{ellers.} \end{cases}$$

b) Fra definisjon av elektrisk potensial:

$$V(a) - V(b) = - \int_b^a \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \int_b^a \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \cdot dr = - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \cdot \ln \frac{a}{b} \quad \left(= |\vec{A}| \cdot \ln \frac{b}{a} \right),$$

der vi har integrert radielt slik at $d\vec{s} = \hat{\mathbf{r}} dr$.

c) Uttrykk for elektrostatiske energitetthet (energi per volum):

$$u = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2.$$

Totalenergien finnes ved å integrere over sylindervolumet mellom $r = a$ og $r = b$ (der $E = A/r \neq 0$), med infinitesimalt sylindervolum $d\tau = 2\pi r dr \cdot \ell$.

$$U = \int_{\text{syl}} u d\tau = \int_{\text{syl}} \frac{1}{2} \epsilon_0 \left(\frac{A}{r} \right)^2 \cdot 2\pi r dr \cdot \ell = \pi \epsilon_0 \ell A^2 \cdot \int_a^b \frac{dr}{r} = \pi \epsilon_0 \ell A^2 \cdot \ln \frac{b}{a}.$$

Per lengdeenhet og innsatt A :

$$U' = \frac{U}{\ell} = \pi \epsilon_0 \left(\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \right)^2 \cdot \ln \frac{b}{a} = \frac{\lambda^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \ln \frac{b}{a} \quad \left(= A^2 \cdot \pi \epsilon_0 \cdot \ln \frac{b}{a} \right).$$

[Alternativt kan oppgaven løses ved å integrere over ladning, $U = \int \frac{1}{2} V \cdot dq$. Det er ladning kun ved flatene $r = a$ og $r = b$, og dessuten er potensialet ved b lik null: $V(b) = 0$, slik at energi per lengdeenhet blir

$$U' = \frac{U}{\ell} = \frac{1}{2\ell} [V(a) \cdot \lambda \ell + V(b)(-\lambda)\ell] = \frac{1}{2} V(a) \cdot \lambda = \frac{\lambda^2}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{b}{a}.$$

Man må da altså ha funnet svaret på $V(a)$ i punktet ovenfor.]

d) Enkleste måte å finne feltstyrken på er å bruke gradienten i sylindervekoordinater (ingen ϕ og z -avhengighet):

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V = -\frac{\partial}{\partial r} \left(V_0 \frac{b-r}{b-a} \right) \hat{\mathbf{r}} = V_0 \cdot \frac{1}{b-a} \cdot \hat{\mathbf{r}}.$$

Romladningen finnes enklest fra $\rho = \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$. Med divergens for sylindervekoordinater får man

$$\rho(r) = \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \left(V_0 \cdot \frac{1}{b-a} \cdot \hat{\mathbf{r}} \right) = \epsilon_0 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{V_0}{b-a} \right) = \frac{\epsilon_0 V_0}{r(b-a)}.$$

Dette gjelder $r \in [a, b]$. Utenfor er $\rho = 0$.

Oppgave 3.

a) Ladning i hver tynne ring er $dq = \sigma(r) \cdot dA$ med $dA = 2\pi r dr$. Totalladning finnes ved å integrere fra $r = a$ til $r = b$:

$$Q = \int_a^b dq = \int_a^b \sigma(r) 2\pi r dr = \int_a^b \sigma_0 \frac{b^2}{r^2} 2\pi r dr = 2\pi \sigma_0 b^2 \int_a^b \frac{dr}{r} = \underline{2\pi \sigma_0 b^2 \ln \frac{b}{a}}.$$

b) I en tynn ring med radius r og bredde dr går det en strøm $dI = dq/T$, der dq er ladningen som passerer et visst punkt på ringen i en viss tid T . Et fornuftig valg er T lik tida skiva bruker på én omdreining (perioden), dvs. $T = 2\pi/\omega$. For den tynne ringen er $dq = \sigma(r) \cdot 2\pi r dr$ som i oppgave a). En slik tynn strømring har da strøm

$$dI = \frac{dq}{T} = \frac{\sigma(r) \cdot 2\pi r dr}{2\pi/\omega} = \sigma_0 \omega b^2 \frac{dr}{r}$$

og omslutter et areal πr^2 , slik at dens magnetiske dipolmoment er

$$d\mu = dI \cdot \pi r^2 = \sigma_0 \omega b^2 \pi r dr.$$

Skivas totale magnetiske dipolmoment finner vi ved å integrere dette, fra $r = a$ til $r = b$:

$$\mu = \int_a^b d\mu = \int_a^b \sigma_0 \omega b^2 \pi r dr = \underline{\frac{1}{2} \sigma_0 \omega b^2 \pi (b^2 - a^2)}.$$

Retningen er normal på strømsløyfa etter høyrehåndsregelen, dvs. $\vec{\mu} = \mu \hat{\mathbf{k}}$ (langs positiv z -akse hvis $\sigma_0 > 0$).

[Her har mange bommet ved å bruke $d\mu = dI dA$, eller også $d\mu = I dA$; med $dA = 2\pi r dr$ og $I = \int_a^b dI$, som er feil. Arealet som inngår i definisjonen av magnetisk dipolmoment er arealet **innenfor strømsløyfa**, ikke arealet av selve strømsløyfa.]

Oppgave 4.

a) Biot-Savart:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{s} \times \vec{r}}{r^3}$$

med $d\vec{s}$ langs sirkelen og $r^2 = a^2 + x^2$. Siden $d\vec{s} \perp \vec{r}$ vil $d\vec{B}$ ha størrelse

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{ds}{r^2} \quad \text{og} \quad dB_x = dB \cdot \sin \theta = dB \cdot a/r,$$

mens de andre komponentene blir null når vi integrerer rundt sirkelen.

Integrasjon over hele sirkelsløyfa gir

$$B_x = \oint dB_x = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{ds}{r^2} \frac{a}{r}$$

og idet r er konstant under integrasjonen og $\oint ds = 2\pi a$, får vi

$$\vec{B} = B_x \hat{i} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} 2\pi a \frac{a}{r^3} \hat{i} = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{a^2}{(x^2 + a^2)^{3/2}} \hat{i}.$$

som skulle vises.

b) Fluks gjennom sløyfe B p.g.a. strømmen i sløyfe A:

$$\Phi_{BA} = B_x(x) \cdot \pi b^2 = \frac{\mu_0 I_A}{2} \frac{a^2}{r^3} \cdot \pi b^2$$

der vi har brukt oppgitt uttrykk fra a) og $r^3 = (x^2 + a^2)^{3/2} = ((0,20)^2 + (0,10)^2)^{3/2} \text{ m}^3 = 0,0119 \text{ m}^3$. Strømmen i A fra $t = 0$ til $t = t_1 = 10 \text{ s}$ kan uttrykkes

$$I_A(t) = I_0 + (I_1 - I_0) \frac{t}{t_1}$$

slik at induert ems. i sløyfe B er gitt ved Faradays lov:

$$\mathcal{E}_B = -\dot{\Phi}_{BA} = \frac{\mu_0 \dot{I}_A}{2} \frac{a^2}{r^3} \pi b^2 = \frac{\mu_0 (I_1 - I_0)/t_1}{2} \frac{a^2}{r^3} \pi b^2$$

og strømmen blir, innsatt tallverdier:

$$I_B = \frac{\mathcal{E}_B}{R_B} = \frac{\mu_0 (I_1 - I_0)}{2t_1 R_B} \frac{a^2}{r^3} \pi b^2 = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m} \cdot 40 \text{ A}}{2 \cdot 10 \text{ s} \cdot 1,00 \cdot 10^{-3} \Omega} \frac{(0,05 \text{ m})^2}{0,0119 \text{ m}^3} \pi (0,02 \text{ m})^2 = 6,64 \cdot 10^{-7} \text{ A} = \underline{0,66 \mu\text{A}}.$$

Kontroll av enhet ved hjelp av tabell i Øgrim og Lian:

$$\frac{\text{H/m} \cdot \text{A}}{\text{s} \cdot \Omega} \cdot \text{m} = \frac{(\text{Vs/A}) \cdot \text{A}}{\text{s} \cdot \text{V/A}} = \text{A}.$$

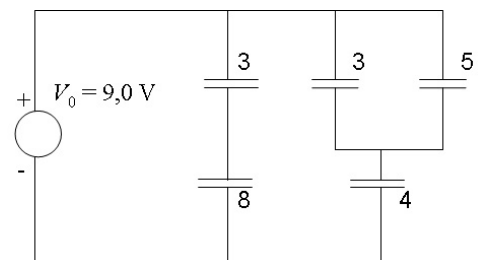
Fluksen Φ_B øker i positiv x -retning, slik at ifølge Lenz' lov vil I_B induseres motsatt retning av I_A .

Oppgave 5.

Den venstre parallellkretsen med kondensatorene 3 og 8 har ingen betydning for svarene.

a) I høyre kretsdel er 3+5 i parallell ekvivalent med en kondensator lik 8. Over seriekoplingen 8 og 4 fordeler ladningen seg likt, slik at spenningen er omvendt proporsjonal med kapasitans: $V_4 = Q/4 \mu\text{F}$, $V_8 = Q/8 \mu\text{F}$, som gir $V_4 = 2V_8$ og med $V_4 + V_8 = V_0$ får vi

$$V_4 = V_0 \cdot \frac{2}{3} = \underline{6,00 \text{ V}}.$$



b) Spenningen V_8 over parallellkoplingen 3+5 er de resterende 3,00 V, og spenningen er lik på både 3 og 5-kondensatoren, slik at ladningen på 5-kondensatoren blir

$$Q_5 = C_5 \cdot V_5 = 5,00 \mu\text{F} \cdot 3,00 \text{ V} = \underline{15,0 \mu\text{C}}.$$