

Eks. 16. aug. 2012 Løsningsforslag.**Oppgave 1. Flervalgsspørsmål**

Oppgave:	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
Rett svar:	B	E	E	B	B	D	C	A	B	B

Detaljer om noen av spørsmålene:

a) B. Siden spenningsforsyningen er frakopla endres ikke ladningen Q . Kapasitansen $C = Q/V$ øker med en faktor 5,0: $C = 5C_0$, dermed avtar spenningen med en faktor 5 og energien $U = \frac{1}{2}QV$ reduseres også med en faktor 5. (En kraft vil virke på materialet som trekker det inn i mellomrommet.)

b) E. For det første peker $\vec{E}$ ut fra en positiv flate som betyr at potensialet avtar utover, og det er en løsning på problemet. Vi må finne ut hvordan $V(z)$ ser ut i nærheten av et uendelig stort uniformt ladd positivt plan. Behandlet i tidligere oppgaver (eller se Ex. 22.7 i Y&F) og funnet at $\vec{E}$ er konstant og lik $\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \cdot \hat{\mathbf{k}}$. Da må V (for $z > 0$) bli $V(z) = V_0 - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \cdot z$. Når V_0 er 20 V, så skal vi finne z når $V(z) = 0$. Setter en inn dette får vi $z = 18$ cm.

c) E. Det er ingen kraft på magnetisk materiale i homogent magnetisk felt. Forresten er også dreiemomentet $\tau = \vec{\mu} \times \vec{B} = 0$ fordi magnetisk moment $\vec{\mu}$ er parallelt med B -feltet (men det var det ikke spørsmål etter).

d) B. $\vec{F} = (-e)\vec{v} \times \vec{B}$ vil ifølge høyrehåndsregelen ha retning mot venstre i forhold til $\vec{v}$.

e) B. Magtefeltlinjer løper ut fra N-pol og inn mot S-pol. Når magneten beveger seg mot ringen øker magnetfluksen i retning venstre, og for å motveie dette (Lenz' lov) settes det opp en strøm ifølge høyrehåndsregelen som går i angitt retning. Altså B rett.

f) D. I er vanlig (lednings)strøm, mens andre leddet representerer forskyvningsstrømmen (pga. endring i elektrisk fluks Φ_E). Dimensjonsmessig ser vi lett at vi må dividere bort μ_0 for å få strøm.

g) C. Faradays lov: $\mathcal{E} = -\frac{\partial \Phi_B}{\partial t} = -\frac{\partial (BA \cos \theta)}{\partial t} = BA \sin \theta \cdot \frac{\partial \theta}{\partial t} = BA \sin \theta \cdot \omega$ der B er magnetfelt, A areal av strømsløyfa og ω rotasjonshastigheten. Sinusfunksjon representert ved kurve 3.

h) A. $H = IN/\ell = 3,0 \text{ A} \cdot 350/0,15 \text{ m} = 7000 \text{ A/m}$. $B = (1 + \chi_m)\mu_0 H \approx \mu_0 H = 8,80 \text{ mT}$.

i) B. Når 3 tas ut blir kretsens totale resistans større (med 3 inne: $2R + 3R//R = 11/4 \cdot R$ og med 3 ute: $5R$). Når resistansen øker, avtar strømmen i kretsen. Strømmen går i sin helhet gjennom 1, slik at lysstyrken ($P = RI^2$) i denne avtar.

j) B. Ved resonans er strømmamplytten $|I| = |V|/|Z|$ maksimal, dvs. impedansen $Z = R + i\omega L + 1/(i\omega C)$ minimal med $\omega L = 1/(\omega C)$ og $Z = R$. Den er null kun dersom resistansen $R = 0$.

Oppgave 2.

a) P.g.a. sylindersymmetri kan $\vec{E}$ kun ha radiell komponent, som betyr den kan skrives $\vec{E} = E_r \hat{\mathbf{r}}$. All ladning legger seg på yttersida av innerlederen og innerside av ytterlederen. Vi bruker Gauss' lov for en sylinder med radius r og lengde ℓ : $\oint \epsilon_0 \vec{E} \cdot d\vec{A} = Q_{\text{encl}}$. På endeflatene er $\vec{E} \parallel d\vec{A}$ og på sylinderflata er $\vec{E}$ konstant og normal på flata med totalt areal $2\pi r\ell$ som da gir

$$\epsilon_0 E_r \cdot 2\pi r\ell = \begin{cases} 0 & r < a \\ \lambda \ell & r \in [a, b] \\ 0 & r > b \end{cases} \Rightarrow \vec{E} = \begin{cases} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{\mathbf{r}} & r \in [a, b] \\ \vec{0} & \text{ellers.} \end{cases}$$

b) Enkleste måte å finne feltstyrken på er å bruke gradienten i sylinderkoordinater (fra formelark, ingen ϕ og z -avhengighet):

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V = -\frac{\partial}{\partial r} \left(V_0 \frac{b-r}{b-a} \right) \hat{\mathbf{r}} = V_0 \cdot \frac{1}{b-a} \cdot \hat{\mathbf{r}}.$$

Romladningen finnes enklest fra $\rho = \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$. Med divergens for sylinderkoordinater (formelark) får man

$$\rho(r) = \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \left(V_0 \cdot \frac{1}{b-a} \cdot \hat{\mathbf{r}} \right) = \epsilon_0 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{V_0}{b-a} \right) = \frac{\epsilon_0 V_0}{r(b-a)}. \quad (\text{gjelder } r \in [a, b]. \text{ Utenfor er } \rho = 0)$$

Uten bruk av divergens, kan man bruke Gauss' lov med sylindersymmetri: $\epsilon_0 E(r) \cdot 2\pi r \cdot \ell = Q_{\text{encl}} = \int_a^r \rho(r) \cdot 2\pi r \cdot \ell \cdot dr$. Forkorter $2\pi\ell$, setter inn $E(r)$ fra a) og deriverer:

$$\epsilon_0 V_0 \cdot \frac{1}{b-a} \cdot r = \int_a^r \rho(r) \cdot r \cdot dr \xrightarrow{\text{deriv.}} \epsilon_0 V_0 \cdot \frac{1}{b-a} = \rho(r) \cdot r \Rightarrow \rho = \frac{\epsilon_0 V_0}{r(b-a)}$$

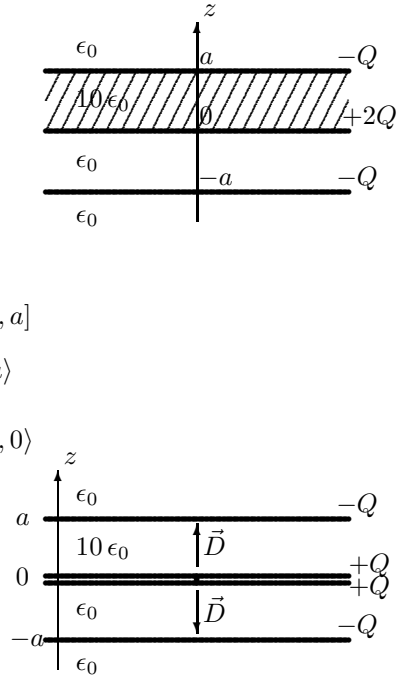
Oppgave 3.

a) Velger å bruke Gauss' lov for $\vec{D}$ med sylindre med akse parallelt med z -aksen og endeflater lik platenes areal A . En lang sylinder som inkluderer alle tre platene har null nettoladning innenfor og derfor null fluks ut. Derfor er $\vec{D} = 0$ utenfor platene.

En kort sylinder som omslutter kun plate (0) har nettoladning $2Q$. Fluks-tettheten $\vec{D}$ er uavhengig av permittiviteten, $\oint \vec{D} \cdot d\vec{A} = 2Q$ gir derfor $D = Q/A = \sigma$ til hver side av plate (0). Elektrisk feltstyrke er $\vec{E} = \vec{D}/(\epsilon_r \epsilon_0)$, slik at svaret blir med $\sigma = Q/A$:

$$\begin{aligned} \vec{D} &= 0 \quad \text{og} \quad \vec{E} = 0 \quad \text{for} \quad z \notin [-a, a] \\ \vec{D} &= \sigma \hat{\mathbf{k}} \quad \text{og} \quad \vec{E} = \frac{\sigma}{10\epsilon_0} \hat{\mathbf{k}} \quad \text{for} \quad z \in [0, a] \\ \vec{D} &= -\sigma \hat{\mathbf{k}} \quad \text{og} \quad \vec{E} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{\mathbf{k}} \quad \text{for} \quad z \in [-a, 0] \end{aligned}$$

Alternativ: Ladningen på midterste plate vil legge seg med $+Q$ på hver side. Det betyr at platene kan betraktes som to seriekoblede kondensatorer med ladning $Q + Q$ på midtplatene (i motsetning til $Q - Q$ som vanlig for seriekoblede kondensatorer), vist til høyre. Da er det veldig enkelt å se at D -feltet blir som vist over.



b) Vi bruker i det følgende $E_1 = \frac{Q}{\epsilon_0 A}$ og $E_2 = \frac{Q}{10\epsilon_0 A}$. Potensialet øker $+E_1 a$ fra $(-a)$ til (0) , og avtar $-E_2 a$ fra (0) til (a) . Følgelig er

$$\underline{V(0) = E_1 a = \frac{Qa}{\epsilon_0 A} \quad \text{og} \quad V(a) = [V(a) - V(0)] + V(0) = -E_2 a + E_1 a = \frac{9Qa}{10\epsilon_0 A},}$$

ALTERNATIVT mer sirlig med integral:

$$\begin{aligned} V(0) &= -\int_{-a}^0 \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\int_{-a}^0 (-E_1 \hat{\mathbf{k}}) \cdot dz \hat{\mathbf{k}} = E_1(0 - (-a)) = E_1 a \\ V(a) &= [V(a) - V(0)] + V(0) = -\int_0^a E_2 \cdot dz + E_1 a = -E_2 a + E_1 a = -\frac{Q}{10\epsilon_0 A} a + \frac{Q}{\epsilon_0 A} a = \frac{9}{10} \frac{Qa}{\epsilon_0 A}. \end{aligned}$$

c) Vi bruker $D_1 = D_2 = Q/A = \sigma$, $E_1 = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma$ og $E_2 = \frac{1}{10\epsilon_0} \sigma$. Med homogene felt er energitettheten konstant i hvert mellomrom og lik:

$$\begin{aligned} \text{mellom } (-a) \text{ og } (0): \quad u_1 &= \frac{1}{2} D_1 E_1 = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{\epsilon_0} \left(= \frac{1}{2} \epsilon_0 E_1^2 \right) \\ \text{mellom } (0) \text{ og } (a): \quad u_2 &= \frac{1}{2} D_2 E_2 = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{10\epsilon_0} \left(= \frac{1}{2} \cdot 10\epsilon_0 E_2^2 \right) \end{aligned}$$

Begge mellomrom har volum aA , slik at total energi blir

$$U = \int_{\text{volum}} u \cdot d\tau = u_1 \cdot aA + u_2 \cdot aA = \left(\frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{\epsilon_0} + \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{10\epsilon_0} \right) \cdot aA = \frac{11}{20} \frac{\sigma^2}{\epsilon_0} \cdot aA = \frac{11}{20} \frac{Q^2 a}{\epsilon_0 A},$$

eller med E_1 og E_2 dersom ikke funnet svar i a):

$$U = u_1 \cdot aA + u_2 \cdot aA = \left(\frac{1}{2} \epsilon_0 E_1^2 + \frac{1}{2} \cdot 10\epsilon_0 E_2^2 \right) \cdot aA = \underline{\underline{\frac{1}{2} aA \epsilon_0 (E_1^2 + 10E_2^2)}}.$$

Alternativt beregnet fra formelen $U = \frac{1}{2} \sum qV$ over de tre platene:

$$U = \frac{1}{2} (-Q) \cdot V(-a) + \frac{1}{2} (2Q) \cdot V(0) + \frac{1}{2} (-Q) \cdot V(a) = \frac{1}{2} (-Q) \cdot 0 + \frac{1}{2} (2Q) \frac{Qa}{\epsilon_0 A} + \frac{1}{2} (-Q) \cdot \frac{9}{10} \frac{Qa}{\epsilon_0 A} = \underline{\underline{\frac{11}{20} \frac{Q^2 a}{\epsilon_0 A}}}.$$

Oppgave 4.

a) Biot-Savart:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{s} \times \vec{r}}{r^3}$$

med $d\vec{s}$ langs sirkelen og $r^2 = a^2 + x^2$. Siden $d\vec{s} \perp \vec{r}$ vil $d\vec{B}$ ha størrelse

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{ds}{r^2} \quad \text{og} \quad dB_x = dB \cdot \sin \theta = dB \cdot a/r,$$

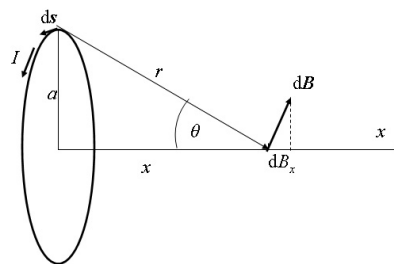
mens de andre komponentene blir null når vi integrerer rundt sirkelen.

Integrasjon over hele sirkelsløyfa gir

$$B_x = \oint dB_x = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{ds}{r^2} \frac{a}{r}$$

og idet r er konstant under integrasjonen og $\oint ds = 2\pi a$, får vi det som skulle vises:

$$\vec{B} = B_x \hat{i} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} 2\pi a \frac{a}{r^3} \hat{i} = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{a^2}{(x^2 + a^2)^{3/2}} \hat{i}.$$



b) Fluks gjennom sløyfe B p.g.a. strømmen i sløyfe A:

$$\Phi_{BA} = B_x(x) \cdot \pi b^2 = \frac{\mu_0 I_A}{2} \frac{a^2}{r^3} \cdot \pi b^2$$

der vi har brukt oppgitt uttrykk fra a) og $r^3 = (x^2 + a^2)^{3/2} = ((0,20)^2 + (0,10)^2)^{3/2} \text{ m}^3 = 0,0119 \text{ m}^3$. Strømmen i A fra $t = 0$ til $t = t_1 = 10 \text{ s}$ kan uttrykkes

$$I_A(t) = I_1 \frac{t}{t_1}$$

slik at induert ems. i sløyfe B er gitt ved Faradays lov:

$$\mathcal{E}_B = -\dot{\Phi}_{BA} = \frac{\mu_0 \dot{I}_A}{2} \frac{a^2}{r^3} \pi b^2 = \frac{\mu_0 I_1 / t_1}{2} \frac{a^2}{r^3} \pi b^2$$

og strømmen blir, innsatt tallverdier:

$$I_B = \frac{\mathcal{E}_B}{R_B} = \frac{\mu_0 I_1}{2 t_1 R_B} \frac{a^2}{r^3} \pi b^2 = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m} \cdot 50 \text{ A}}{2 \cdot 1,0 \text{ s} \cdot 1,00 \cdot 10^{-3} \Omega} \frac{(0,10 \text{ m})^2}{0,0119 \text{ m}^3} \pi (0,02 \text{ m})^2 = 33,18 \cdot 10^{-6} \text{ A} = \underline{33 \mu\text{A}}.$$

Kontroll av enhet ved hjelp av tabell i Øgrim og Lian:

$$\frac{\text{H/m} \cdot \text{A}}{\text{s} \cdot \Omega} \cdot \text{m} = \frac{(\text{Vs/A}) \cdot \text{A}}{\text{s} \cdot \text{V/A}} = \text{A}.$$

Retning: Ifølge Lenz' lov: Fluksen Φ_B øker i x -retning, slik at det i sløyfa B indueres strøm som gir B -felt i $-x$ -retning, som betyr strømmen må gå motsatt av retningen i sløyfe A.

Oppgave 5.

a) Strømmen og ladningene går i positiv x -retning. Magnetfeltet går i negativ z -retning. Med vektornotasjon, der v_d og B er regnet positive, får vi

$$\vec{v}_d = v_d \hat{i} \quad \text{og} \quad \vec{B} = -B \hat{k}.$$

Dette gir følgende kraft på ladningene:

$$\vec{F}_B = q \vec{v}_d \times \vec{B} = e \cdot v_d \cdot B \hat{i} \times (-\hat{k}) = e v_d B \hat{j} = e v_d B \hat{j}.$$

Magnetisk kraft på ladningene altså oppover. Dette fører til at positiv ladning akkumuleres i øvre grenseflate for proben og negative i nedre flate. Denne separasjonen av ladning resulterer i et E -felt retning nedover: $\vec{E} = -E \hat{j}$ (vist i figur i oppgaven). Potensialforskjellen $V_H = E \cdot d$ er Hallspenningen og måles mellom øvre og nedre grenseflate i proben. I tillegg til magnetisk kraft vil elektronene da påvirkes av en elektrisk kraft i retning nedover:

$$\vec{F}_E = e \cdot \vec{E} = -eE \hat{j}.$$

Vi får en likevektssituasjon når nettokraft er lik null:

$$\vec{F}_E + \vec{F}_B = -eE \hat{j} + e v_d B \hat{j} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad E = v_d B, \quad \text{og} \quad \text{altså} \quad \underline{V_H = E \cdot d = v_d B d} \quad (\text{med høyest potensial øverst}).$$

b) Med tverrsnittsarealet $A = td$ og strøm I er driftsfarten v_d for ladningsbærerne q gitt ved (sett bort fra fortegn)

$$I = JA = nqv_d \cdot td \Rightarrow v_d = \frac{I}{nqt d} \left(= \frac{0,15 \text{ A}}{5,0 \cdot 10^{20} \text{ m}^{-3} \cdot 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 0,15 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot 20 \cdot 10^{-3} \text{ m}} = 625 \text{ m/s} \right).$$

Fra uttrykk for V_H ser vi at magnetfeltet da er

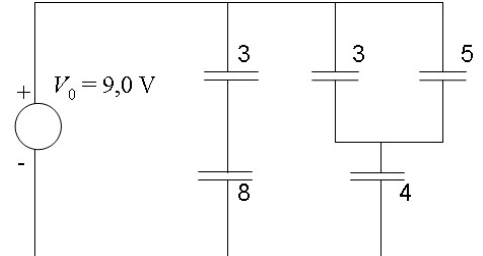
$$B = \frac{V_H}{v_d d} = \frac{V_H}{I} \cdot nqt = \frac{6,5 \text{ V}}{0,15 \text{ A}} \cdot 5 \cdot 10^{20} \text{ m}^{-3} \cdot 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 0,15 \cdot 10^{-3} \text{ m} = \underline{0,52 \text{ T}}.$$

Oppgave 6.

Den venstre parallellkretsen med kondensatorene 3 og 8 har ingen betydning for svarene.

a) I høyre kretsdel er 3+5 i parallell ekvivalent med en kondensator lik 8. Over seriekoplingen 8 og 4 fordeler ladningen seg likt, slik at spenningen er omvendt proporsjonal med kapasitans: $V_4 = Q/4 \mu\text{F}$, $V_8 = Q/8 \mu\text{F}$, som gir $V_4 = 2V_8$ og med $V_4 + V_8 = V_0$ får vi

$$V_4 = V_0 \cdot \frac{2}{3} = \underline{6,00 \text{ V}}.$$



b) Spenningen V_8 over parallellkoplingen 3+5 er de resterende 3,00 V, og spenningen er lik på både 3 og 5-kondensatoren, slik at ladningen på 5-kondensatoren blir

$$Q_5 = C_5 \cdot V_5 = 5,00 \mu\text{F} \cdot 3,00 \text{ V} = \underline{15,0 \mu\text{C}}.$$