

Eksamen 29. mai 2015. Løsningsforslag

Oppgave 1. Flervalgsspørsmål

Oppgave:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Rett svar:	B	D	A	C	D	A	A	E	B	A	D	E	A	B	D	D

Detaljer om spørsmålene:

1-1. B. I elektrostatikken er alltid et metall et ekvipotensial, alle potensialer inne er like. Overflateladningene induseres nettopp for å skjerme E -feltet fra den ladde staven. (Trykkfeil i de to siste alternativer, skulle vært: D) $V_1 = V_2 > V_3$ og E) $V_1 < V_2 = V_3$. Men begge gale, trykkfeil eller ikke.)

1-2. D.
$$U = \sum_{i < j} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a} ((-1) \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 + (-1) \cdot 2) = -\frac{3q^2}{4\pi\epsilon_0 a}$$

1.3 A. Polariseringen $P = Np/V$ (dipolmoment per volumenhet) der p er molekylets dipolmoment og antall molekyler N er lik antall mol $\times$ molekyler per mol. Volumet til 1 liter vann er $1,0 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$, og dette gir

$$P = \frac{Np}{V} = \frac{55,6 \text{ mol} \cdot 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1} \cdot 6,2 \cdot 10^{-30} \text{ Cm}}{1,0 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3} = 0,208 \text{ Cm}^{-2}.$$

1-4. C. Energi i kondensator $= \frac{1}{2} CV^2$, slik at svaret blir $\frac{1}{2} 4,0 \cdot 10^{-6} \text{ F} \cdot (300^2 - 150^2) \text{ V}^2 = 0,135 \text{ J}$.

1-5. D. Metallplatene i hele sin bredde har samme potensial, da blir også elektrisk feltstyrke E lik overalt, både i venstre og høyre halvdel (ser bort fra randeffekter). Dette oppnås ved at fri ladning på metallplatene fordeles seg ulikt mellom høyre og venstre side. Med lik E (V/m) overalt faller potensialet like mye per lengdeenhet gjennom mediene, og alle punkter med samme avstand fra en av platene har samme potensial. Derfor $V_1 = V_3 > V_2 = V_4$.

1-6. A.
$$P_1 = \chi_1 \epsilon_0 E_1 = (\epsilon_r - 1) \epsilon_0 \cdot \frac{D}{\epsilon_r \epsilon_0} = (1 - 1/\epsilon_r) \sigma_0$$

der vi har brukt at den elektriske flukstetthet $D = \sigma_0$ (den samme i hele volumet mellom metallplatene).

1-7. A. B -feltet fra AB har ved punktladningen retning ned i papiplanet. Krafta på positiv ladning har da etter h.h.regelen retning mot høyre, dvs. positiv x -retning.

1-8. E. Med $\vec{v}$ i $-x$ -retning og $\vec{B}$ i $+x$ -retning, er $\vec{F} = (-e)\vec{v} \times \vec{B} = \vec{0}$. Elektronstrålen fortsetter rett på magneten.

1-9. B. Kraftmoment $\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$ der $\vec{\mu} = IA\hat{n}$ er parallell med flatenormalen $\hat{n}$. Etter h.håndregelen vil $\vec{\tau}$ rotere sløyfa slik at $\hat{n}$ blir parallell med $\vec{B}$, og når de er parallelle er $\vec{\tau} = 0$.

1-10. A. $B = \mu H = (1 + \chi)H$ der χ er magn. susceptibilitet. Når B faller med 0,003% når I og dermed H er konstant, er $\chi = -3 \cdot 10^{-5}$.

1-11. D. Metallet har frie valenselektroner. Ifølge Lorentzkrafta $\vec{F} = (-e)\vec{v} \times \vec{B}$ vil disse bevege seg mot øvre enden av staven (høyrehåndregel).

1-12. E. Innenfor en tenkt sirkel Γ med radius r vil med tida fluksen Φ_B øke nedover. Det vil da induseres en ems. som ville gi en strøm mot klokka, slik at indusert B_{ind} vil gå oppover og motvirke økende Φ_B . Da vil i pkt. a $\vec{F} = q\vec{E}$ har retning mot venstre, negativ x -retning.

1-13. A. Med $I(t) = I_0 \exp(i\omega t)$ er $V_L(t) = L dI/dt = iLI(t)$. Dvs. $V_L(t)$ er faktor i (90°) foran $V_R(t) = RI(t)$.

1-14. B. Effekten er $P(t) = V(t) \cdot I(t) = V(t)^2/R = V_0^2 \sin^2(\omega t)/R$. Middeffekten $\langle P \rangle = \langle \sin^2(\omega t) \rangle V_0^2/R = \frac{1}{2} V_0^2/R$ forandres ikke med frekvensen.

1-15. D. Pga. leddet $\cos(ky + \omega t)$ med + propagerer bølgen i negativ y -retning.

1-16. D. Med amplituder E_0 og B_0 er bølgefarta $c = E_0/B_0 = 6,20 \cdot 10^3 \text{ V/m} / (3,60 \cdot 10^{-5} \text{ T}) = 172 \cdot 10^6 \text{ m/s}$.

Oppgave 2. Gauss' lov

a) Ladning på innerste metallkule legger seg på ytterflata ved $r = a$ og ladningen på kuleskallet legger seg på innerflata ved $r = b$. (Ladningene tiltrekkes hverandre i metallet, eller kan vises fra Gauss' lov.) Bruk av Gauss' lov gir da at $\vec{E} = 0$ alle steder unntatt i det dielektriske mellomrommet, der vi får:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{\epsilon_r \epsilon_0} Q \quad \Rightarrow \quad E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_r \epsilon_0}.$$

Altså

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0 r^2} \hat{r} \quad \text{når } r \in [a, b] \quad \vec{E} = \vec{0} \quad \text{når } r \notin [a, b].$$

b) Med $V(\infty) = 0$ og $E \neq 0$ kun i området $r \in [a, b]$ blir

$$V(a) = - \int_{\infty}^a E dr = - \int_{\infty}^b E dr - \int_b^a E dr = 0 - \frac{Q}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0} \left[\frac{1}{r} \right]_b^a = \frac{Q}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0} \left[\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right].$$

KOMMENTAR: En veldig typisk feil er å glemme at $E(r > b) = 0$, slik at det angis

$$V(a) = - \int_{\infty}^a E dr = - \int_{\infty}^a \frac{Q}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0} \left[\frac{1}{r} \right]_{\infty}^a = \frac{Q}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0} \frac{1}{a}.$$

c) Elektrisk felt enklest fra

$$\vec{E} = -\text{grad}V = -\vec{\nabla}V = -\frac{V_0}{b-a} \frac{\partial(b-r)}{\partial r} \hat{r} = \frac{V_0}{b-a} \hat{r}.$$

KOMMENTAR: Flere har i besvarelsen satt inn for V_0 , med $V_0 = V(a)$ fra b). Men dette er ikke rett, da potensialet i a blir høyere når det tilføres ladning til dielektrikumet. Det som derimot er rett er at $\vec{E}(a)$ ikke endres, fordi Gauss' lov fortsatt gir $Q_{\text{enc}} = Q$ innenfor a . Derfor er $E(a) = \frac{V_0}{b-a} \equiv \frac{Q}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0 a^2}$, som gir $V_0 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0} \frac{b-a}{a^2}$. Dermed er også rett svar: $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0 a^2} \hat{r}$.

d) Gauss' lov på differensialform, der vi bruker divergens $\text{div} \vec{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$ for kulekoordinater:

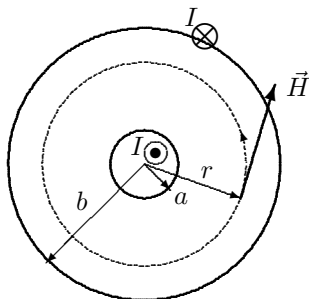
$$\rho(r) = \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{V_0}{b-a} \hat{r} \right) = \epsilon_r \epsilon_0 \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{V_0}{b-a} \right) = \epsilon_r \epsilon_0 \frac{V_0}{b-a} \frac{1}{r^2} 2r = \epsilon_r \epsilon_0 \frac{2V_0}{b-a} \frac{1}{r}.$$

Hvis uttrykt V_0 som vist i kommentar i c), blir et alternativt svar $\rho(r) = \frac{Q}{2\pi} \frac{1}{a^2 r}$.

Alternativt uten bruk av divergens: $\rho(r) = \frac{dQ}{d\tau} = \frac{dQ}{4\pi r^2 dr}$. Der $Q(r) = Q_{\text{enc}}$ (kuleskall innenfor r) bestemmes fra Gauss' lov:

$$Q(r) = \epsilon_r \epsilon_0 \oint \vec{E} d\vec{A} = \epsilon_r \epsilon_0 E(r) 4\pi r^2 = \epsilon_r \epsilon_0 \frac{V_0}{b-a} 4\pi r^2 \quad \Rightarrow \quad \rho(r) = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{dQ(r)}{dr} = \frac{1}{4\pi r^2} \epsilon_r \epsilon_0 \frac{V_0}{b-a} 4\pi 2r = \epsilon_r \epsilon_0 \frac{2V_0}{b-a} \frac{1}{r}.$$

Oppgave 3. Magnetfelt og induktans



a) Vi bruker Ampères lov for magnetfeltstyrken H med integrasjonsveg lik sirkel med radius r konsentrisk med kabelen (se stiplet sirkel på figuren).

P.g.a. symmetri vil H være asimutalt retta: $\vec{H} = H \hat{\phi}$ og ha konstant verdi på integrasjonvegen. Retningen gitt av høyrehåndregelen. Ampères lov gir

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = H \cdot 2\pi r \stackrel{(\text{Amp})}{=} I_{\text{encl}} = \iint \vec{J} \cdot d\vec{A} \quad (1)$$

der I_{encl} er strømmen i arealet innenfor integrasjonsvegen.

I ytterlederen er all strøm samla ved $r = b$. I innerlederen er strømmen jamt fordelt over tverrsnittet og strømtettheten er konstant og lik

$$J_a = \frac{I}{\pi a^2}. \quad (2)$$

Nå er $\vec{J} \parallel d\vec{A}$ og $dA = 2\pi r dr$, slik at $I_{\text{encl}}(r)$ i innerlederen er

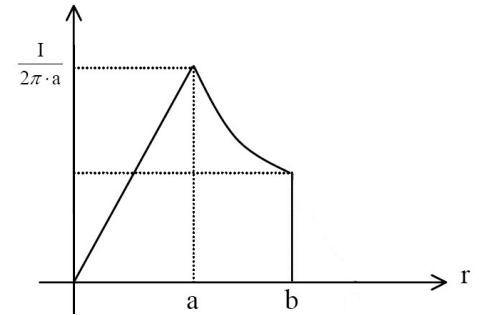
$$I_{\text{encl}}(r) = \iint \vec{J}_a \cdot d\vec{A} = J_a \cdot \int_0^r 2\pi r' dr' = \frac{I}{\pi a^2} \cdot \pi (r')^2 \Big|_0^r = I \cdot \frac{r^2}{a^2}, \quad (3)$$

Sammenholdt med likn. (1) gir dette for de ulike områdene

$$I_{\text{encl}} = \begin{cases} I \cdot \frac{r^2}{a^2} & r < a \\ I & r \in [a, b] \\ 0 & r > b \end{cases}$$

$$H(r) = \begin{cases} \frac{I}{2\pi} \cdot \frac{r}{a^2} & r < a \\ \frac{I}{2\pi} \cdot \frac{1}{r} & r \in [a, b] \\ 0 & r > b \end{cases}$$

Skisse av $H(r)$:



b) Energittettheten (per volumenhet) er for de ulike områder

$$u = \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B} = \frac{1}{2} \mu_0 \cdot H^2 = \begin{cases} \frac{1}{2} \mu_0 \left(\frac{I}{2\pi} \right)^2 \cdot \frac{r^2}{a^4} & r < a \\ \frac{1}{2} \mu_0 \left(\frac{I}{2\pi} \right)^2 \cdot \frac{1}{r^2} & r \in [a, b] \\ 0 & r > b \end{cases}$$

(Oppgaven burde ha oppgitt at permeabiliteten er μ_0 i hele området. Men når ikke annen μ er oppgitt, er dette den naturlige antakelsen.)

Energiinnhold på en lengde ℓ av kabelen blir da, med $d\tau = 2\pi r dr \ell$:

$$U = \int u \cdot d\tau = \frac{1}{2} \mu_0 \left(\frac{I}{2\pi} \right)^2 2\pi \ell \cdot \left[\int_0^a \frac{r^2}{a^4} r dr + \int_a^b \frac{1}{r^2} r dr \right]$$

$$= \frac{1}{2} \mu_0 \left(\frac{I}{2\pi} \right)^2 2\pi \ell \cdot \left[\frac{1}{4} \frac{a^4}{a^4} + \ln \frac{b}{a} \right] = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{I^2}{2\pi} \ell \cdot \left[\frac{1}{4} + \ln \frac{b}{a} \right]$$

Energi per lengdeenhet blir $U' = U/\ell$, og fra oppgitt formel $U' = \frac{1}{2} L' I^2$ ser vi da at

$$L' = \frac{\mu_0}{2\pi} \left[\frac{1}{4} + \ln \frac{b}{a} \right].$$

Med de alternative $H(r) = Cr$ inni og $H(r) = Ca^2/r$ mellom, blir utregningen

$$u = \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B} = \frac{1}{2} \mu_0 \cdot H^2 = \begin{cases} \frac{1}{2} \mu_0 C^2 \cdot r^2 & r < a \\ \frac{1}{2} \mu_0 C^2 \cdot \frac{a^4}{r^2} & r \in [a, b] \\ 0 & r > b \end{cases}$$

$$U = \int u \cdot d\tau = \frac{1}{2} \mu_0 C^2 2\pi \ell \cdot \left[\int_0^a r^2 r dr + a^4 \int_a^b \frac{1}{r^2} r dr \right] = \frac{1}{2} \mu_0 2\pi \ell \cdot C^2 a^4 \left[\frac{1}{4} + \ln \frac{b}{a} \right].$$

$$\underline{L' = \mu_0 2\pi \cdot \frac{C^2}{I^2} a^4 \left[\frac{1}{4} + \ln \frac{b}{a} \right]}. \quad \left(\text{Konstanten } C = \frac{I}{2\pi a^2} \right)$$

KOMMENTAR: En typisk feil her er ikke å integrere men sette $U = u \cdot (\text{volum})$. F.eks. $U = u\pi(b^2 - a^2)\ell$ eller noe liknende. Eller å ikke bruke sylinderkoordinater ved integrasjon. Mange glemmer også at L' får bidrag både fra området $r < a$ og $r \in [a, b]$, total L' er summen.

c) Numerisk for oppgitte data:

$$L' = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}}{2\pi} \left[\frac{1}{4} + \ln \frac{3,0}{0,50} \right] = 0,408 \mu\text{H/m} \quad \underline{L = L' \cdot 10 \text{ m} = 4,1 \mu\text{H}}.$$

Hvis du har brukt det alternative uttrykket for L' der C inngår, kan du ikke finne numerisk svar. Men kan presentere noe å la:

$$L' = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m} \cdot 2\pi \frac{C^2}{I^2} \cdot (0,50 \cdot 10^{-3} \text{ m})^4 \left[\frac{1}{4} + \ln \frac{3,0}{0,50} \right] = 8\pi^2 \frac{C^2}{I^2} \cdot 1,28 \cdot 10^{-13} \text{ Hm}^3.$$

Oppgave 4. Magnetisk kraft

a) Krafta på partikkelen er $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$. Krafta er normal på $\vec{v}$, derfor endres ikke v , kun retningen. Og krafta virker alltid normalt på $\vec{B}$, dvs. i papirplanet. Når v er konstant og $\vec{F} \perp \vec{v}$ alltid, vil $F = |q\vec{v} \times \vec{B}|$ være konstant og gir en konstant avbøyning, dvs. en sirkelbane i et plan normal på $\vec{B}$ (papirplanet). Den magnetiske krafta $F = qvB$ vil altså utgjøre sentripetalkrafta i sirkelbanen:

$$qvB = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow r = \frac{mv}{qB} \quad \text{QED.}$$

b) Kinetisk energi $U = \frac{1}{2}mv^2$ gir $v = \sqrt{2U/m}$ og dermed

$$r = \frac{m\sqrt{2U/m}}{qB} = \frac{\sqrt{2Um}}{qB} = \frac{\sqrt{2 \cdot 3,0 \cdot 10^6 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J} \cdot 6,64 \cdot 10^{-27} \text{ kg}}}{2 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 0,50 \text{ T}} = 0,499 \text{ m} = \underline{0,50 \text{ m}}.$$

Kontroll av enheten (hjelp fra Angell & Lian): $\frac{\sqrt{\text{Nm} \cdot \text{kg}}}{\text{As} \cdot \text{T}} = \frac{\sqrt{\text{kg}^2 \text{ m}^2 / \text{s}^2}}{\text{As} \cdot \text{kg s}^{-2} \text{ A}^{-1}} = \text{m}.$

Hastigheten $v = \sqrt{2U/m} = \sqrt{2 \cdot 3,0 \cdot 10^6 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J/m} / 6,64 \cdot 10^{-27} \text{ kg}} = 12,0 \cdot 10^6 \text{ m/s}$ og dermed ikke relativistisk.

Omløpstid $T = \text{omkrets} / \text{hastighet} :$

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi m}{qB} = \frac{2\pi \cdot 6,64 \cdot 10^{-27} \text{ kg}}{2 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 0,50 \text{ T}} = \underline{0,26 \mu\text{s}} \quad \text{eller} \quad T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi \cdot 0,499 \text{ m}}{12,0 \cdot 10^6} = \underline{0,26 \mu\text{s}}.$$

Kontroll av enheten (hjelp fra Angell & Lian): $\frac{\text{kg}}{\text{As} \cdot \text{T}} = \frac{\text{kg}}{\text{As} \cdot \text{kg s}^{-2} \text{ A}^{-1}} = \text{s}.$

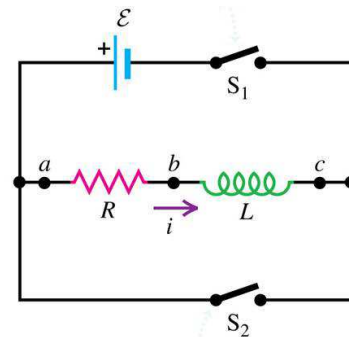
Oppgave 5. RL-krets

a) Spenningen over motstanden er $V_R = RI$ og spenningen over induktansen er $V_L = L dI/dt$. Det er ingen strøm i kretsen ved $t = 0^-$, og strømmen gjennom L kan ikke plutselig endres, slik at den er null også ved $t = 0^+$. Da er det også null strøm gjennom R : $V_R(0^+) = RI = 0$

og hele spenningen $\mathcal{E}$ over L : $V_L(0^+) = \mathcal{E}$.

b) Etter lang tid er I blitt konstant (stasjonære forhold, med strøm $I(\infty) = \mathcal{E}/R$), dermed er $V_L(\infty) = L dI/dt = 0$

og hele spenningen $\mathcal{E}$ over R : $V_R(\infty) = \mathcal{E}$.



c) Kretsen består nå kun av R og L i serie, med en gitt startstrøm bestemt av situasjonen før bryterne slås over. Strømmen i L kan ikke endre seg brått, dermed er $I(0^+) = I(0^-) = \mathcal{E}/R$. Denne strømmen går nå gjennom R , L og S_2 . Det er ingen spenningsfall mellom c og a i figuren, slik at spenningen over R og L er motsatt like store. Da er $V_R(0^+) = I(0^+)R = \mathcal{E}$ og $V_L(0^+) = -V_R(0^+) = -\mathcal{E}$.

Spenningen over L kan endre seg brått, her endres den fra 0 til $-\mathcal{E}$.

d) Strømmen umiddelbart etter bryterne slås over er altså $I_0 = I(0^+) = \mathcal{E}/R$. Diff.likningen for kretsen fra Kirchhoffs lov:

$$IR + L dI/dt = 0 \Rightarrow \frac{dI}{I} = -\frac{R}{L} dt \Rightarrow \ln \left(\frac{I(t)}{I_0} \right) = -\frac{R}{L} (t - 0).$$

Altså

$$\underline{I(t) = I_0 \exp \left\{ -\frac{R}{L} t \right\} = \frac{\mathcal{E}}{R} \exp \left\{ -\frac{R}{L} t \right\} .}$$

KOMMENTAR: Noen har i besvarelsen brukt kompleks analyse $e^{i\omega t}$ med $Z = R + i\omega L$. Men det er slett ingen harmonisk periodiske signal i kretsen, så slik analyse er helt feil.