

NORGES TEKNISK-
NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK

Kontakt under eksamen:
Jon Andreas Støvneng
Telefon: 73 59 36 63

LØSNINGSFORSLAG TIL
EKSAMEN FY1303 ELEKTRISITET OG MAGNETISME
Onsdag 19. mai 2004 kl. 0900 - 1400

Hjelpemidler: C

- K. Rottmann: Matematisk formelsamling
- O. Øgrim og B. E. Lian: Størrelser og enheter i fysikk og teknikk
- Typegodkjent kalkulator, med tomt minne, i henhold til liste utarbeidet av NTNU

Eksamen bestod av 4 oppgaver. Det er angitt i forbindelse med hver enkelt oppgave hvor mye den teller under bedømmelsen.

Sensuren kan ventes ca 3. juni.

OPPGAVE 1 (Teller 25%)

(Mer omfattende enn det som forlanges som en fullgod ”kort” forklaring!)

1. I en krystall, dvs et fast stoff med atomene ordnet i en regulær gitterstruktur, har vi energiintervaller med tillatte tilstander for elektronene, *energibånd*, adskilt av intervaller med forbudte tilstander, *energigap*. Paulis eksklusjonsprinsipp tillater maksimalt ett elektron i hver tillatte tilstand. Ved $T = 0$ K er krystallen i grunntilstanden, dvs elektronene okkuperer tilstander med lavest mulig energi. I en halvleder som f.eks. Si har vi så mange elektroner tilgjengelig at vi akkurat fyller et antall energibånd fullstendig. Det øverste båndet som er fylt med elektroner kalles valensbåndet. Det laveste båndet som er tomt kalles ledningsbåndet.
2. Ved $T = 0$ K er en halvleder en elektrisk isolator. Et påtrykt elektrisk felt vil ikke gi noen elektrisk strøm fordi ingen elektroner kan tilføres energi fra det påtrykte feltet: Det er ingen ledige tilstander med litt høyere energi. Enten er slike tilstander forbudte (for elektronene øverst i valensbåndet) eller så er de allerede okkupert av andre elektroner (for elektroner nedover i valensbåndet). I et metall vil elektronene bare delvis fylle det øverste energibåndet (ledningsbåndet). Med et påtrykt elektrisk felt vil elektronene med høyest energi ha ledige tillatte tilstander med litt høyere energi. Disse vil dermed få tilført energi pga det ytre feltet, og vi får en netto drift av elektroner i en retning, altså en elektrisk strøm. Med en endelig temperatur i en halvleder (dvs ikke null temperatur) vil det være en viss sannsynlighet for at elektroner nær toppen av valensbåndet har blitt termisk eksitert til ledningsbåndet. Denne sannsynligheten øker med økende temperatur. Altså øker antall mobile ladningsbærere med økende temperatur, og dermed også den elektriske ledningsevnen.
3. Når et elektron eksiteres fra valensbåndet til ledningsbåndet, etterlater det seg en ledig tilstand i valensbåndet. De gjenværende elektronene nær toppen av valensbåndet kan da transporteres via denne ledige tilstanden og bidra til den elektriske strømmen. Alternativt kan vi rett og slett oppfatte fraværet av et elektron i valensbåndet som tilstedeværelse av en positivt ladet partikkel, et hull, som vil drive gjennom krystallen under påvirkning av et elektrisk felt. Dermed har vi både negativt ladete elektroner i ledningsbåndet og positivt ladete hull i valensbåndet som bidrar til elektrisk strøm i en halvleder.
4. Hvis vi erstatter et Si-atom med f.eks. et As-atom, vil As-atomet ha et elektron ”til overs” etter at det har dannet bindinger til fire Si naboatomer. Dette 5. valenselektronet til As vil dermed være svakt bundet til As-atomet og frigjøres lett ved hjelp av vekselvirkning med det vibrerende gitteret. I energibånddiagrammet manifesteres dette ved at vi får et nytt tillatt energinivå E_d like under bunnen av ledningsbåndet i Si-krystallen (E_c). Nå vil det ved en gitt temperatur være mye større sannsynlighet for at dette femte valenselektronet til As, med energi E_d , er eksitert opp i ledningsbåndet enn tilsvarende for elektroner nær toppen av valensbåndet, dvs med energi E_v . Antall elektroner i ledningsbåndet, og dermed den elektriske ledningsevnen, kan dermed økes ved å øke antall forurensningsatomer (f.eks. As) i krystallen. Tilsvarende argumentasjon kan gjennomføres for f.eks. Al i en Si-krystall. Al må ”snappe opp” et elektron fra Si-krystallen for å få dannet de fire bindingene til naboatomene. Dermed frigjøres et hull som kan bidra til elektrisk strøm. I energibånddiagrammet manifesteres dette ved at vi får et tillatt energinivå E_a like over toppen av valensbåndet i Si-krystallen. Dermed vil

det lett kunne eksiteres et elektron fra toppen av valensbåndet til dette nye energinivået, slik at vi får en ledig tilstand i valensbåndet, dvs et hull.

OPPGAVE 2 (Teller 15%)

(Mer omfattende enn det som forlanges som en fullgod "kort" forklaring!)

Vi kan f.eks. tenke oss at vi har viklet opp en spoletråd rundt en i utgangspunktet umagnetisk jernsyylinder, som i figuren til høyre i oppgaveteksten. Startpunktet "0" for vårt "eksperiment" tilsvarer da $I = 0$, og dermed $H = 0$, dvs null ytre felt inne i spolen. Jernet er ferromagnetisk, som betyr at atomære magnetiske dipoler vekselvirker med hverandre slik at nabodipoler foretrekker å peke i samme retning. Dermed har vi netto magnetisering forskjellig fra null på "kort" lengdeskala, dvs innenfor såkalte magnetiske domener. Slike domener er typisk små i forhold til et makroskopisk stykke jern, men store i forhold til f.eks. avstanden mellom naboatomer. De kan godt inneholde $\sim 10^{15} - 10^{20}$ atomer. Retningen på magnetiseringen er forskjellig for ulike domener. Slik kan netto magnetisering på makroskopisk nivå bli tilnærmet lik null:

$$\mathbf{M} = \sum_d \mathbf{M}_d \simeq 0$$

Skrur vi på et ytre magnetfelt (ved å la det gå en strøm I i spoletråden), vil domener med magnetisering i samme retning som det ytre feltet vokse på bekostning av domener med magnetisering i andre retninger. (Fordi potensiell energi til en magnetisk dipol $\mathbf{m}$ i et magnetfelt $\mathbf{B}$ er lik $-\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}$.) Dermed øker verdien av magnetiseringen M inntil essensielt hele jernstykket har magnetisering i samme retning som det ytre feltet. Da har vi nådd "1" på hysteresekurven, med maksimal magnetisering M_s . Reduseres styrken på det eksterne feltet H , vil vi ikke følge den opprinnelige kurven tilbake til $M = 0$ når $H = 0$. Innretting av magnetiseringen langs det ytre feltet er en delvis irreversibel prosess. Vi ender derfor opp i "2" på hysteresekurven når det ytre feltet er skrudd av, med en viss "restmagnetisering". Men ved å skru på et ytre felt i motsatt retning, vil vi tvinge magnetiske dipoler til igjen å peke i samme retning som det ytre feltet, og vi ender opp i "3", med alle dipoler rettet inn langs det ytre feltet. Reduserer vi igjen verdien av H til null, sitter vi igjen med en restmagnetisering i punktet "4" på hysteresekurven. Endelig skrur vi på et ytre felt i samme retning som vi startet med og kommer tilbake til "5" (dvs "1") med maksimal magnetisering M_s . Og slik vil det fortsette, fra "1" via "2" til "3", og tilbake via "4" til "5", når vi endrer retning på det ytre feltet.

Vi vet at en permanent-magnet ikke påvirkes særlig av et ytre felt (f.eks. en annen permanent-magnet), dvs den beholder sin magnetisering i styrke og retning selv om den utsettes av et ytre H -felt. En kjøkkenkniv, derimot, er umagnetisk ($M = 0$) uten et ytre felt ($H = 0$), og mister forholdsvis raskt en eventuell magnetisering som er oppnådd i et ytre felt. Dermed kan vi konkludere med at kurve A må representere kjøkkenkniven og kurve B permanent-magneten.

OPPGAVE 3 (Teller 30%)

Kretsens totale impedans er

$$Z = R + i\omega L$$

med absoluttverdi

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$$

og fasevinkel

$$\alpha = \arctan \frac{\omega L}{R}$$

Dette er da også faseforskyvningen mellom strøm og spenning i kretsen. Strømamplituden er

$$|I_0| = \frac{V_0}{|Z|} = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$$

Spenningsfallet over motstanden er ifølge Ohms lov

$$V_R = RI$$

så amplituden blir

$$V_{R0} = R|I_0| = \frac{V_0 R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$$

Spenningsfallet over induktansen er

$$V_L = L\dot{I} = i\omega LI$$

så amplituden blir

$$V_{L0} = \omega L|I_0| = \frac{V_0 \omega L}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$$

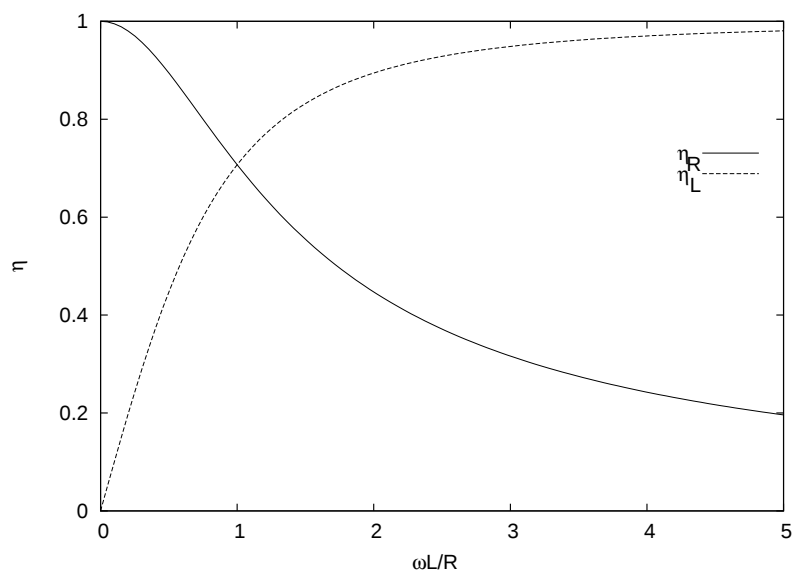
De to η -funksjonene er altså

$$\eta_R(\omega) = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$$

og

$$\eta_L(\omega) = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$$

Skisse:



Amplituden til spenningsfallet over motstanden R er størst for lave frekvenser. Vi må derfor legge utgangssignalet over R dersom vi vil at dette fortrinnsvis skal bestå av lavfrekvente komponenter av inngangssignalet.

OPPGAVE 4 (Teller 30%)

$$\begin{aligned}
 \langle P \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T V(t) I(t) dt \\
 &= \frac{1}{T} \int_0^T V_0 \cos \omega t |I_0| \cos(\omega t - \alpha) dt \\
 &= \frac{\omega}{2\pi} V_0 |I_0| \frac{1}{\omega} \int_0^{2\pi} \cos x \cos(x - \alpha) dx
 \end{aligned}$$

hvor vi har substituert $x = \omega t$, og dermed $dt = dx/\omega$. Bruker oppgitte sammenhenger og finner

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} \cos x \cos(x - \alpha) dx &= \int_0^{2\pi} (\cos x \cos x \cos \alpha + \cos x \sin x \sin \alpha) dx \\
 &= \cos \alpha \int_0^{2\pi} \left(\frac{\sin 2x}{4} + \frac{x}{2} \right) + \sin \alpha \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x}{2} = \cos \alpha \cdot \pi
 \end{aligned}$$

som gir

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} V_0 |I_0| \cos \alpha$$

Kretsen i oppgaven er en motstand R koblet i serie med en parallellkobling av C og R . Total impedans blir dermed

$$Z = R + \left(\frac{1}{R} + i\omega C \right)^{-1} = R + \frac{R}{1 + i\omega RC}$$

Forholdet mellom $|Z|$ og R blir

$$\begin{aligned}\beta &= \frac{|Z|}{R} = \left| 1 + \frac{1}{1 + i\omega RC} \right| \\ &= \left| \frac{1 + i\omega RC + 1}{1 + i\omega RC} \right| \\ &= \frac{\sqrt{4 + (\omega RC)^2}}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} = \sqrt{\frac{4 + x^2}{1 + x^2}}\end{aligned}$$

med $x = \omega/\omega_0 = \omega RC$, dvs $\omega_0 = 1/RC$.

Grensetilfeller:

$$x \ll 1: \quad \beta \simeq 2, \quad |Z| \simeq 2R$$

Rimelig: For riktig lave frekvenser representerer C en åpen krets, så vi har essensielt bare to motstander R i serie, dvs total motstand $R + R = 2R$.

$$x \gg 1: \quad \beta \simeq 1, \quad |Z| \simeq R$$

Rimelig: For riktig høye frekvenser representerer C en kortslutning, så vi har essensielt bare en motstand R .

For oppgitte verdier er

$$x = \omega RC = 5 \cdot 10^4 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 10^{-6} = 1$$

slik at

$$|Z| = \sqrt{\frac{5}{2}} R \simeq 6.3 \Omega$$

Bestemmer fasevinkelen til impedansen:

$$\begin{aligned}Z &= R \left(1 + \frac{1}{1 + ix} \right) = R \left(1 + \frac{1 - ix}{1 + x^2} \right) \\ &= R \left(\frac{2 + x^2}{1 + x^2} - i \frac{x}{1 + x^2} \right) = \operatorname{Re} Z + i \operatorname{Im} Z\end{aligned}$$

Dermed:

$$\alpha = \arctan \frac{\operatorname{Im} Z}{\operatorname{Re} Z} = \arctan \left(\frac{-x}{2 + x^2} \right)$$

som med $x = 1$ gir

$$\alpha = -\arctan \frac{1}{3} = -0.32 = -18.4^\circ$$

Strømamplituden blir

$$|I_0| = \frac{V_0}{|Z|} = \sqrt{\frac{2}{5}} \frac{V_0}{R}$$

slik at

$$\begin{aligned}\langle P \rangle &= \frac{1}{2} V_0 \sqrt{\frac{2}{5}} \frac{V_0}{R} \cos \left(-\arctan \frac{1}{3} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot \sqrt{\frac{2}{5}} \cdot \frac{10}{4} \cdot \cos(-0.32) \\ &= 7.5 \text{ W}\end{aligned}$$