

NORGES TEKNISK-
NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK

Kontakt under eksamen:
Jon Andreas Støvneng
Telefon: 73 59 36 63

LØSNINGSFORSLAG TIL
EKSAMEN FY1303 ELEKTRISITET OG MAGNETISME
Onsdag 15. desember 2004 kl. 0900 - 1300

Hjelpemidler: C

- K. Rottmann: Matematisk formelsamling
- O. Øgrim og B. E. Lian: Størrelser og enheter i fysikk og teknikk
- Typegodkjent kalkulator, med tomt minne, i henhold til liste utarbeidet av NTNU

Eksamen bestod av 4 oppgaver. Det er angitt i forbindelse med hver enkelt oppgave hvor mye den teller under bedømmelsen.

Sensuren kan ventes ca 12. januar.

OPPGAVE 1 (Teller 15%)

1: A. 2: B. 3: D. 4: A. 5: C. 6: A.

OPPGAVE 2 (Teller 25%)

Fra hysteresekurven har vi at $B(H = 0) = \pm 1.0 \text{ T}$ og $H(B = 0) = \mp 3.4 \text{ A/mm} = \mp 3400 \text{ A/m}$. Videre ser vi at $B(H \rightarrow \pm\infty) = \pm 1.5 \text{ T}$. Her gjelder øvre fortegn for den øverste kurven (dvs minkende H).

Starter med å bestemme H_0 :

$$\begin{aligned} B(3.4) &= 0 = B_0 \arctan 0 \\ \Rightarrow H_0 &= 3.4 \text{ A/mm} \end{aligned}$$

Deretter B_0 :

$$\begin{aligned} B(\infty) &= 1.5 \text{ T} = B_0 \arctan(\infty) = B_0 \frac{\pi}{2} \\ \Rightarrow B_0 &= \frac{3.0}{\pi} \text{ T} \simeq 0.95 \text{ T} \end{aligned}$$

Til slutt α :

$$\begin{aligned} B(0) &= 1.0 \text{ T} = B_0 \arctan(\alpha) \\ \Rightarrow \arctan(\alpha) &= \frac{\pi}{3} \\ \Rightarrow \alpha &= \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3} \simeq 1.73 \end{aligned}$$

For å bestemme w finner vi først $H(B)$:

$$\begin{aligned} B(H) &= B_0 \arctan\left(\alpha \frac{H \mp H_0}{H_0}\right) \\ \Rightarrow \alpha \frac{H \mp H_0}{H_0} &= \tan\left(\frac{B}{B_0}\right) \\ \Rightarrow H \mp H_0 &= \frac{H_0}{\alpha} \tan\left(\frac{B}{B_0}\right) \\ \Rightarrow H_{\pm}(B) &= \pm H_0 + \frac{H_0}{\alpha} \tan\left(\frac{B}{B_0}\right) \end{aligned}$$

Her gjelder øvre fortegn kurven som tilsvarer økende verdi av H . Energien w som tapes i jernsylinderen pr volumenhet er gitt ved integralet av $H(B)$ en runde rundt hysteresekurven. Integrasjonsgrensene er $\pm 1.5 \text{ T}$, dvs $\pm B_0\pi/2$.

$$\begin{aligned} w &= \oint H(B) dB \\ &= \int_{-B_0\pi/2}^{B_0\pi/2} H_+ dB + \int_{B_0\pi/2}^{-B_0\pi/2} H_- dB \\ &= \int_{-B_0\pi/2}^{B_0\pi/2} H_+ dB - \int_{-B_0\pi/2}^{B_0\pi/2} H_- dB \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-B_0\pi/2}^{B_0\pi/2} (H_+ - H_-) dB \\
&= 2H_0 \int_{-B_0\pi/2}^{B_0\pi/2} dB \\
&= 2H_0 B_0 \pi
\end{aligned}$$

Innsetting av tallverdier gir

$$w = 2 \cdot 3400 \cdot \frac{3}{\pi} \cdot \pi = 20400$$

dvs i enheten J/m³.

OPPGAVE 3 (Teller 30%)

$$\begin{aligned}
\langle P_R \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T V_R(t) I_R(t) dt \\
&= \frac{1}{T} \int_0^T R I_R(t) \cdot I_R(t) dt \\
&= \frac{1}{T} \int_0^T R |I_{R0}|^2 \cos^2 \omega t dt \\
&= \frac{\omega}{2\pi} R |I_{R0}|^2 \frac{1}{\omega} \int_0^{2\pi} \cos^2 x dx
\end{aligned}$$

hvor vi har substituert $x = \omega t$, og dermed $dt = dx/\omega$. Bruker oppgitt sammenheng og finner

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \cos^2 x dx &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{\sin 2x}{4} + \frac{x}{2} \right) \\
&= \pi
\end{aligned}$$

som gir

$$\langle P_R \rangle = \frac{1}{2} R |I_{R0}|^2$$

Kretsens totale impedans er

$$Z = R_0 + \left(\frac{1}{R_1} + i\omega C \right)^{-1} = R_0 + \frac{R_1}{1 + i\omega R_1 C}$$

Spenningsfallet over parallellkoblingen av R_1 og C er

$$\tilde{V} = V - R_0 I = Z I - R_0 I = (Z - R_0) I = \frac{R_1}{1 + i\omega R_1 C} I$$

Dermed er strømmen gjennom R_1 lik

$$I_1 = \frac{\tilde{V}}{R_1} = \frac{1}{1 + i\omega R_1 C} I$$

med amplitude

$$|I_{10}| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega R_1 C)^2}} |I_0|$$

slik at

$$\frac{|I_0|^2}{|I_{10}|^2} = 1 + (\omega R_1 C)^2$$

som vi vil trenge straks...

Utnyttelsesgraden blir

$$\begin{aligned} \frac{\langle P_1 \rangle}{\langle P_0 \rangle + \langle P_1 \rangle} &= \frac{R_1 |I_{10}|^2 / 2}{R_0 |I_0|^2 / 2 + R_1 |I_{10}|^2 / 2} \\ &= \frac{1}{1 + R_0 |I_0|^2 / R_1 |I_{10}|^2} \\ &= \frac{1}{1 + R_0 [1 + (\omega R_1 C)^2] / R_1} \end{aligned}$$

Innsetting av oppgitte tallverdier gir en utnyttelsesgrad på

$$\left(1 + \frac{5}{25} [1 + (314 \cdot 25 \cdot 0.0002)^2]\right)^{-1} \simeq 0.59$$

dvs 59 %.

En alternativ framgangsmåte er som følger:

Vi skal bestemme forholdet

$$\frac{\langle P_1 \rangle}{\langle P_0 \rangle + \langle P_1 \rangle} = \frac{\langle P_1 \rangle}{\langle P_{\text{tot}} \rangle} = \frac{\langle P_{\text{tot}} \rangle - \langle P_0 \rangle}{\langle P_{\text{tot}} \rangle} = 1 - \frac{\langle P_0 \rangle}{\langle P_{\text{tot}} \rangle}$$

Her har vi $\langle P_0 \rangle$ fra før, mens

$$\langle P_{\text{tot}} \rangle = \frac{1}{2} V_0 |I_0| \cos \alpha = \frac{1}{2} |Z| |I_0|^2 \cos \alpha$$

Da må vi regne ut $|Z|$ og fasevinkelen α :

$$\begin{aligned} |Z| &= \left| R_0 + \frac{R_1}{1 + i\omega R_1 C} \right| \\ &= \left| \frac{R_0 + R_1 + i\omega R_0 R_1 C}{1 + i\omega R_1 C} \right| \\ &= \sqrt{\frac{(R_0 + R_1)^2 + (\omega R_0 R_1 C)^2}{1 + (\omega R_1 C)^2}} \\ &= 16.6593 \, \Omega \end{aligned}$$

Telleren i Z er

$$T_Z = R_0 + R_1 + i\omega R_0 R_1 C = |T_Z| \exp \left(i \arctan \frac{\omega R_0 R_1 C}{R_0 + R_1} \right)$$

og nevneren i Z er

$$N_Z = 1 + i\omega R_1 C = |N_Z| \exp (i \arctan \omega R_1 C)$$

slik at total fasevinkel for Z blir

$$\alpha = \arctan \frac{\omega R_0 R_1 C}{R_0 + R_1} - \arctan \omega R_1 C \simeq -0.7477$$

Altså er $\cos \alpha \simeq 0.7333$, og vi har for utnyttelsesgraden:

$$1 - \frac{R_0}{|Z| \cos \alpha} = 1 - \frac{5}{16.6593 \cdot 0.7333} \simeq 0.59$$

OPPGAVE 4 (Teller 30%)

Kretsens impedans er

$$Z = R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C} = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

slik at strøamplituden blir

$$|I_0| = \frac{V_0}{|Z|} = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}$$

Vi ser at nevneren antar sin minimale verdi R når $\omega = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. Dette gir maksimal verdi for $|I_0|$. Følgelig er kretsens resonansfrekvens

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

Høyeste ønskede resonansfrekvens, $f_{0,\max} = 100$ MHz, krever kapasitans

$$C_{\min} = \frac{1}{4\pi^2 L f_{0,\max}^2} = 1.206 \text{ pF}$$

Laveste ønskede resonansfrekvens, $f_{0,\min} = 90$ MHz, krever kapasitans

$$C_{\max} = \frac{1}{4\pi^2 L f_{0,\min}^2} = 1.489 \text{ pF}$$

Kapasitansen må derfor kunne varieres mellom 1.2 og 1.5 pF.

Hvis vi kaller strøamplituden ved $f_0 \pm 0.2$ MHz for $I_0^\pm$ og tilhørende impedans (i absoluttverdi) for $Z_\pm$, krever oppgaven at

$$\frac{I_0^\pm}{I_0} \leq 0.2$$

dvs

$$\frac{Z_0}{Z_\pm} \leq 0.2$$

eventuelt

$$25Z_0^2 \leq Z_\pm^2$$

Her er $Z_0 = R$ impedansen ved resonans mens

$$Z_\pm^2 = R^2 + \left(\omega_\pm L - \frac{1}{\omega_\pm C}\right)^2$$

er impedansen ved ”grensefrekvensene”

$$\omega_{\pm} = \omega_0 \pm \Delta\omega = 2\pi(f_0 \pm 0.2 \text{ MHz})$$

Kravet til motstanden blir

$$R \leq \frac{1}{\sqrt{24}} \left| \omega_{\pm} L - \frac{1}{\omega_{\pm} C} \right|$$

Her er det bare å sette inn tallverdier og bestemme største tillatte verdi av R . Strengt tatt burde vi sjekke både øvre og nedre grense av f_0 , og dessuten både pluss og minus Δf . Her vil disse fire ”variantene” gi enten 1.0 eller 1.1 Ω , så vi konkluderer med at

$$R \leq 1.0 \Omega$$