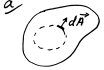
Kontinuasjonseksamen i emne
SIF4012 Fysikk 2, 17/8 - 01.

Forslag til løsning

(1)

Oppgave 1

a)



I likevekt kan det ikke være noe elektrisk felt i ledere, dvs. $\vec{E}=0$ (ellers vil det gå strøm). Dannar så et lukket volum inne i leideren og benytter Gauss lov ved å integrere over overflaten til dette volumet. Med $\vec{E}=0$ gir dette

$$\Phi = \varepsilon_0 \int \vec{E}\cdot d\vec{A} = 0$$

Dvs. nettoladningen $\underline{\underline{Q=0}}$ innenfor et slikt volum. Følgelig må all nettoladning være plassert på overflaten.

Når en ladet metallkule bringes inn i en av et lukket metallkuleskal vil hele ladningen overføres til ytterflaten av systemet da det ikke kan være nettoladning på innerflaten i likevekt (da $\vec{E}=0$ også i halvrommet).

For å finne sammenhengen mellom $\vec{E}$ og σ langs en metalloverflate kan en benytte Gauss lov. Ved å integrere over overflaten til det skisserte volumet finner en

$$\varepsilon_0 \int \vec{E}\cdot d\vec{A} = \varepsilon_0 E A = Q = \sigma A$$

$$\underline{\underline{\sigma = \varepsilon_0 E}}$$

b) For store avstander fra kula blir potensialet $V(r) \to Az$ $(r\to\infty)$. Det elektriske feltet blir da

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = -A = E_0$$

som betyr at $\underline{\underline{A = -E_0}}$

Siden det elektriske feltet inne i en metallkule er lik null innebærer det at potensialet er konstant innenfor og da også konstant langs overflaten. En får derfor

$$V(R) = Az + B\frac{\cos\theta}{R^2} = \left(AR + \frac{B}{R^2}\right)\cos\theta = \text{konst} = 0$$

(konst = 0 her p.g.a. den gitte θ-avhengigheten.) Dette gir så

$$AR + \frac{B}{R^2} = 0$$

$$B = -AR^3 = \underline{\underline{R^3 E_0}}$$

c) Det elektriske feltet vil stå normalt på metalloverflaten. Derfor vil bare radialkomponenten til flateladningen

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(Ar + \frac{B}{r^2}\right)\cos\theta = \left(-A + \frac{2B}{r^3}\right)\cos\theta$$

$$= \left(E_0 + 2E_0\left(\frac{R}{r}\right)^3\right)\cos\theta \xrightarrow[r\to R]{} 3E_0\cos\theta$$

Tetthetene av indiserte overflateladninger blir følgelig

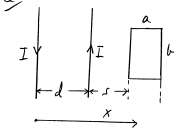
$$\sigma = \varepsilon_0 E = \underline{\underline{3\varepsilon_0 E_0 \cos\theta}}$$

slik at $\sigma_0 = 3\varepsilon_0 E_0$.

(3)

Oppgave 2.

a)



Potensialforskjellen mellom de 2 lederne vil være

$$\Delta V = V(d-R) - V(R) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left(\ln\frac{d-R}{R} - \ln\frac{d}{d-R}\right) = \underline{\underline{\frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{d-R}{R}\right)}} \left(\approx \underline{\underline{\frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{d}{R}\right)}}\right)$$

Ladning på stykke av lengde l

$$Q = \lambda l$$

Kapasitansen blir følgelig $(d \gg R)$

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{\lambda l}{\frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{d-R}{R}\right)} \approx \underline{\underline{\frac{\pi\varepsilon_0 l}{\ln(d/R)}}}$$

b) Magnetfeltet mellom lederne (rettet opp av papirplanet og vinkelrett dette) finnes ved å addere feltene fra hver av lederne. Med det gitte uttrykket har en da

$$B = B_1 + B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{d-x}\right)$$

Magnetisk fluks gjennom sløyfe av lengde l blir følgelig

$$\Phi_m = \int \vec{B}\cdot d\vec{A} = l\int_R^{d-R} B\,dx = l\frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_R^{d-R}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{d-x}\right)dx$$

(4)

$$= \frac{l\mu_0 I}{2\pi}\Big[\ln x - \ln(d-x)\Big]_R^{d-R} = \frac{l\mu_0 I}{2\pi}2(\ln(d-R) - \ln R)$$

$$= \underline{\underline{\frac{l\mu_0 I}{\pi}\ln\frac{d-R}{R}}} \approx \underline{\underline{\frac{l\mu_0 I}{\pi}\ln(d/R)}}$$

Selvinduktansen av sløyfen (ledningsstykket) blir følgelig

$$L = \frac{\Phi_m}{I} \approx \underline{\underline{\frac{l\mu_0}{\pi}\ln(d/R)}}$$

[Merk at $(1/L)(C/l) = \mu_0\varepsilon_0 = 1/c^2$ der c er lyshastigheten c er da også forplantningshastigheten til elektriske signaler (bølger) langs ledningsparet.]

c) Magnetfeltet i den rektangulære strømsløyfen blir som funnet under punkt b) men med $d+s<x<d+s+a$. Med sløyfe av lengde b blir nå fluksen gjennom denne

$$\Phi_m = \int \vec{B}\cdot d\vec{A} = b\int_{d+s}^{d+s+a} B\,dx = \frac{b\mu_0 I}{2\pi}\Big[\ln x - \ln(d-x)\Big]_{d+s}^{d+s+a}$$

$$= \frac{b\mu_0 I}{2\pi}\left[\ln\left(\frac{d+s+a}{d+s}\right) - \ln\frac{s+a}{s}\right] = \underline{\underline{\frac{b\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{(d+s+a)s}{(d+s)(s+a)}}}$$

Vår sin

$$\frac{dI}{dt} = -\omega I_0 \sin\omega t$$

Indusert elektromotorisk kraft blir dermed

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi_m}{dt} = \underline{\underline{\frac{b\mu_0\omega I_0}{2\pi}\sin\omega t\,\ln\frac{(d+s+a)s}{(d+s)(s+a)}}}$$

(5)

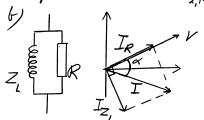
Oppgave 3.

a) Vinkelfrekvensen er $\omega = 2\pi f = 2\pi\cdot 3400\,s^{-1} = \underline{\underline{2{,}14\cdot 10^4\,s^{-1}}}$

Med dette finner en:

	Impedans	Faservinkel
Motstanden:	$Z = R = \underline{\underline{8{,}0\,\Omega}}$	$\underline{\underline{\alpha = 0}}$
Induktansen:	$Z = \omega L = 2{,}14\cdot 10^4\cdot 4{,}5\cdot 10^{-3}\,\Omega = \underline{\underline{9{,}6\,\Omega}}$	$\alpha = \frac{\pi}{2} = \underline{\underline{90°}}$
Kapasitansen:	$Z = \frac{1}{\omega C} = \frac{1\,\Omega}{2{,}14\cdot 10^4\cdot 4{,}24\cdot 10^{-9}} = \underline{\underline{1{,}95\cdot 10^5\,\Omega}}$	$\alpha = -\frac{\pi}{2} = \underline{\underline{-90°}}$

b)



En har strømmene

$$I_R = \frac{1}{R}V$$

$$I_{Z_L} = \frac{1}{X}V$$

Resulterende strøm blir da

$$I = \sqrt{I_R^2 + I_{Z_L}^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{X}\right)^2}\,V = \frac{1}{Z}V$$

Impedansen blir følgelig

$$Z = \left(\sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{X^2}}\right)^{-1} = \frac{RX}{\sqrt{R^2 + X^2}} = \frac{3{,}0\cdot 4{,}0\,\Omega}{\sqrt{3{,}0^2 + 4{,}0^2}} = \underline{\underline{2{,}4\,\Omega}}$$

Faservinkel: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{I_{Z_L}}{I_R} = \frac{1/X}{1/R} = \frac{R}{X} = \frac{3}{4} = \underline{\underline{0{,}75}}$

$$\alpha = \underline{\underline{36{,}9°}}$$

Alternativt med komplekse tall:

Parallellkopling: $\frac{1}{Z} = \frac{1}{R} + \frac{1}{Z_L} \Rightarrow Z = \frac{RZ_L}{R+Z_L} = \frac{RiX}{R+iX} = \frac{RX}{X-iR} = |Z|e^{i\alpha}$, der $|Z| = \frac{RX}{(R^2+X^2)^{1/2}}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{R}{X}$.