

NORGES TEKNISK-
NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK

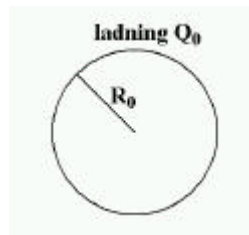
Faglig kontakt under eksamen:
Jon Andreas Støvneng

LØSNINGSFORSLAG TIL
EKSAMEN I FAG SIF 4012 ELEKTROMAGNETISME
(SIF 4012 FYSIKK 2)

Onsdag 12. desember 2001

kl. 0900-1400

Eksamen bestod av 10 deloppgaver som alle teller like mye under bedømmelsen, 10 poeng pr deloppgave, 100 poeng oppnåelig totalt.

OPPGAVE 1

a) I elektrostatisk likevekt må vi ha $\mathbf{E} = 0$ inne i kula. Hvis ikke ville det virke krefter $\mathbf{F} = q \mathbf{E}$ på mobile ladninger, og vi ville få en elektrisk strøm. Vi legger så en lukket Gaussflate i sin helhet innenfor kulas overflate. Med $\mathbf{E} = 0$ overalt på denne flaten gir Gauss lov

$$q = e_0 \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = 0,$$

dvs nettoladningen $q = 0$ innenfor Gaussflaten. Vi kan legge Gaussflaten vår så nær inntil kulas overflate som vi vil, så konklusjonen må bli at hele nettoladningen Q_0 er plassert på kulas overflate. Av symmetrigrunner må dessuten ladningen være jevnt fordelt på overflaten. For å bestemme $\mathbf{E}$ utenfor metallkula tar vi en sfærisk Gaussflate, konsentrisk med metallkula, og med radius r . Gauss lov gir da:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q_0}{e_0} \Rightarrow E(r) = \frac{Q_0}{4\pi e_0 r^2} \quad (r \geq R_0)$$

der $\mathbf{E}$ av symmetrigrunner må være radielt rettet, og utover dersom $Q_0 > 0$.

b) Vi har sammenhengen $\mathbf{E} = -\nabla V$ mellom elektrostatisk felt og elektrisk potensial. Her har vi sfærisk symmetri, dvs ingen vinkelavhengighet i $\mathbf{E}$ eller V , dvs $\mathbf{E} = -(dV/dr)\mathbf{e}_r$. Dermed:

$$V(r) = -\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\int_r^\infty E(r') dr' = \int_r^\infty \frac{Q_0}{4\pi e_0 r'^2} dr' = \frac{Q_0}{4\pi e_0 r} = \frac{K_1 Q_0}{r} \quad (r \geq R_0)$$

dvs $K_1 = 1/(4\pi e_0)$.

Inne i kula:

$$\mathbf{E} = 0 \Rightarrow dV/dr = 0 \Rightarrow V = \text{konstant}$$

$$\text{Kontinuerlig } V \Rightarrow V(r < R_0) = \underline{K_1 Q_0 / R_0}. \quad (= Q_0 / (4\pi e_0 R_0)).$$

Potensiell energi $U_0 =$ totalt arbeid for å øke kulas ladning fra 0 til Q_0

$$\Rightarrow U_0 = \int_0^{Q_0} v(q) dq = \int_0^{Q_0} \frac{q}{4\pi e_0 R_0} dq = \int_0^{Q_0} \frac{q^2}{8\pi e_0 R_0} = \frac{Q_0^2}{8\pi e_0 R_0} = \frac{K_2 Q_0^2}{R_0}$$

dvs $K_2 = 1/(8\pi e_0)$.

(Alternativ løsningsmetode: Energi pr volumenhet i det elektrostatiske feltet er $u = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$. Ved å integrere u over hele volumet oppnås samme potensielle energi U_0 .)

c) Fra punkt b har vi at potensialet på de to kulene er hhv $V_1 = K_1 Q_1 / R_0$ og $V_2 = K_1 Q_2 / R_0$. Med spenningsfall RI over motstanden og $L di/dt$ over spolen, samt potensialforskjell $\Delta V = V_2 - V_1$ mellom kulene, har vi:

$$\Delta V = V_2 - V_1 = K_1 \frac{Q_2}{R_0} - K_1 \frac{Q_1}{R_0} = \frac{K_1}{R_0} (2Q_0 - q - Q_0 - q) = \frac{K_1}{R_0} (Q_0 - 2q)$$

$$\Rightarrow RI + L\dot{I} = \Delta V = \frac{K_1}{R_0} (Q_0 - 2q)$$

$$\Rightarrow L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{2K_1}{R_0} q = \frac{K_1 Q_0}{R_0}$$

$$\Rightarrow \ddot{q} + \frac{R}{L} \dot{q} + \frac{2K_1}{LR_0} q = \frac{K_1 Q_0}{LR_0}$$

$\Rightarrow$

$$g = \frac{R}{2L} \quad w_0 = \sqrt{\frac{2K_1}{LR_0}} = \sqrt{\frac{1}{2pe_0 LR_0}} \quad h_0 = \frac{K_1 Q_0}{LR_0} = \frac{Q_0}{4pe_0 LR_0}$$

For å bestemme z_1 og z_2 er det enkleste å prøve med $\exp(zt)$ som løsning av den homogene ligningen:

$$\Rightarrow (z^2 + 2gz + w_0^2) e^{zt} = 0$$

$$\Rightarrow z = -g \pm \sqrt{g^2 - w_0^2}$$

$$\Rightarrow z_1 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{2K_1}{LR_0}} \quad z_2 = -\frac{R}{2L} - \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{2K_1}{LR_0}}$$

Alternativt kunne vi rett og slett ha satt inn den oppgitte løsningen i den oppgitte ligningen for q :

$$\dot{q} = bz_1 e^{z_1 t} + cz_2 e^{z_2 t}$$

$$\ddot{q} = bz_1^2 e^{z_1 t} + cz_2^2 e^{z_2 t}$$

$\Rightarrow$

$$(z_1^2 + 2gz_1 + w_0^2) b e^{z_1 t} + (z_2^2 + 2gz_2 + w_0^2) c e^{z_2 t} + w_0^2 a = h_0$$

$\Rightarrow$

$$a = \frac{h_0}{w_0^2} = \frac{Q_0}{2}, \quad z_{1,2} = -g \pm \sqrt{g^2 - w_0^2}$$

På denne måten får vi også fastlagt a direkte. En kan alternativt innse direkte hva a må bli på følgende måte:

$t \rightarrow \infty : q \rightarrow Q_0/2$ (like ladninger på kule 1 og 2 i likevekt)

$$\Rightarrow Q_0/2 = a + 0 + 0$$

$$\Rightarrow \underline{a = Q_0/2}$$

Til slutt bruker vi grensebetingelser for q og I = dq/dt for å fastlegge b og c:

Ved t=0: q = 0 og I = 0

$$\Rightarrow a + b + c = 0 \quad \text{og} \quad bz_1 + cz_2 = 0$$

$$\Rightarrow c = -b - a = -\left(b + \frac{Q_0}{2}\right)$$

$$\Rightarrow bz_1 - \left(b + \frac{Q_0}{2}\right)z_2 = 0$$

$$\Rightarrow b = \frac{Q_0 z_2}{2(z_1 - z_2)}$$

$$= \frac{Q_0}{4\sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{2K_1}{LR_0}}} \left(-\frac{R}{2L} - \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{2K_1}{LR_0}} \right)$$

$$c = -b - \frac{Q_0}{2} = -\frac{Q_0 z_2}{2(z_1 - z_2)} - \frac{Q_0(z_1 - z_2)}{2(z_1 - z_2)} = -\frac{Q_0 z_1}{2(z_1 - z_2)}$$

$$= \frac{Q_0}{4\sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{2K_1}{LR_0}}} \left(\frac{R}{2L} - \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{2K_1}{LR_0}} \right)$$

d) Denne oppgaven kan løses på to måter, en enkel og en litt mer omstendelig.

Den enkle først:

Vi har allerede slått fast at i likevekt er $Q_1 = Q_2 = 3Q_0/2$.

Potensiell energi for $t \leq 0$: $U_i = U_1 + U_2 = K_2 Q_0^2/R_0 + K_2 (2Q_0)^2/R_0 = 5 K_2 Q_0^2/R_0 = 5U_0$

Potensiell energi for $t \rightarrow \infty$: $U_f = 2 K_2 (3Q_0/2)^2/R_0 = 9U_0/2$

Reduksjonen i potensiell energi må ha blitt tapt som varme i motstanden, altså:

$$\Delta U_{\text{varme}} = U_i - U_f = \frac{1}{2} U_0 = \frac{1}{2} K_2 Q_0^2/R_0 = \underline{Q_0^2/(16\pi\epsilon_0 R_0)}$$

Den omstendelige metoden går ut på å beregne varmetapet direkte, dvs å regne ut

$$\Delta U_{\text{varme}} = \int_0^\infty RI(t)^2 dt$$

ettersom instantan effekt i motstanden er $P(t) = RI(t)^2$.

$$\begin{aligned}
I &= bz_1 e^{z_1 t} + cz_2 e^{z_2 t} \\
\Rightarrow I^2 &= (bz_1)^2 e^{2z_1 t} + (cz_2)^2 e^{2z_2 t} + 2bcz_1 z_2 e^{(z_1+z_2)t} \\
\Rightarrow \Delta U_{\text{var me}} &= R \int_0^\infty dt \left[(bz_1)^2 e^{2z_1 t} + (cz_2)^2 e^{2z_2 t} + 2bcz_1 z_2 e^{(z_1+z_2)t} \right] \\
&= R \left(-\frac{b^2 z_1^2}{2z_1} - \frac{c^2 z_2^2}{2z_2} - \frac{2bcz_1 z_2}{z_1 + z_2} \right) \\
&= -R \left(\frac{1}{2} b^2 z_1 + \frac{1}{2} c^2 z_2 + \frac{2bcz_1 z_2}{z_1 + z_2} \right) \\
&= -\frac{RQ_0^2}{8} \left(\frac{z_1 z_2^2 + z_1^2 z_2}{(z_1 - z_2)^2} - \frac{4z_1^2 z_2^2}{(z_1 + z_2)(z_1 - z_2)^2} \right) \\
&= -\frac{RQ_0^2}{8} \frac{z_1 z_2}{(z_1 - z_2)^2} \left(\frac{(z_2 + z_1)(z_1 + z_2)}{z_1 + z_2} - \frac{4z_1 z_2}{z_1 + z_2} \right) \\
&= -\frac{RQ_0^2}{8} \frac{z_1 z_2}{(z_1 - z_2)^2} \frac{(z_1 - z_2)^2}{z_1 + z_2} \\
&= -\frac{RQ_0^2}{8} \frac{z_1 z_2}{z_1 + z_2}
\end{aligned}$$

der vi har brukt at

$$b^2 = \frac{Q_0^2 z_2^2}{4(z_1 - z_2)^2}, \quad c^2 = \frac{Q_0^2 z_1^2}{4(z_1 - z_2)^2}, \quad bc = -\frac{Q_0^2 z_1 z_2}{4(z_1 - z_2)^2}$$

Endelig har vi:

$$\begin{aligned}
z_1 z_2 &= \left(-\frac{R}{2L} + \sqrt{\dots} \right) \left(-\frac{R}{2L} - \sqrt{\dots} \right) = \frac{R^2}{4L^2} - \left(\frac{R^2}{4L^2} - \frac{2K_1}{LR_0} \right) = \frac{2K_1}{LR_0} = \frac{4K_2}{LR_0} \\
z_1 + z_2 &= -\frac{R}{L}
\end{aligned}$$

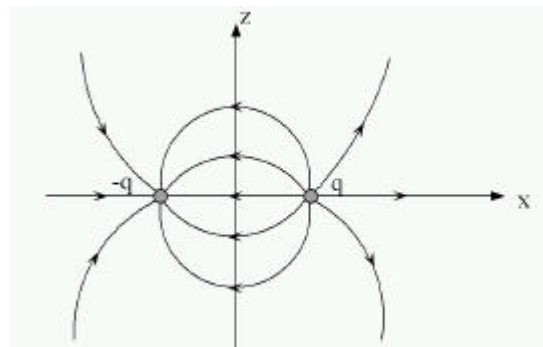
slik at

$$\Delta U_{\text{var me}} = -\frac{RQ_0^2}{8} \frac{\frac{4K_2}{LR_0}}{\left(-\frac{R}{L} \right)} = \frac{K_2 Q_0^2}{2R_0} = \frac{1}{2} U_0$$

OPPGAVE 2

a)

Feltlinjer for det elektriske feltet i xz-planet:



På x-aksen:

$$\vec{E}(x) = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0(x+a)^2|x+a|}\hat{x} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0(x-a)^2|x-a|}\hat{x}$$

$$= \frac{-q\hat{x}}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{(x+a)|x+a|} - \frac{1}{(x-a)|x-a|} \right)$$

$$x \gg a : \frac{1}{(x+a)|x+a|} - \frac{1}{(x-a)|x-a|} = \frac{(x-a)^2 - (x+a)^2}{(x+a)^2(x-a)^2} = -\frac{4ax}{(x+a)^2(x-a)^2} \approx -\frac{4a}{x^3}$$

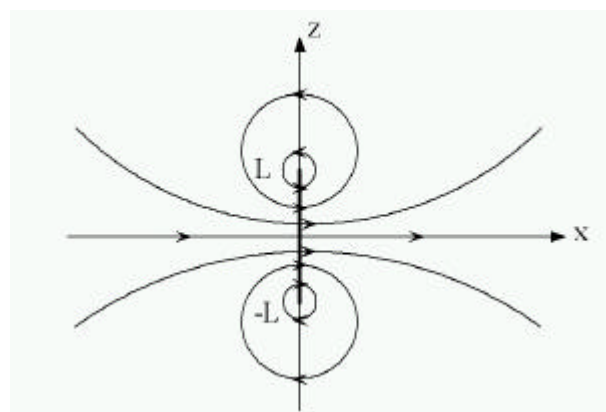
$$x \ll -a : \frac{1}{(x+a)|x+a|} - \frac{1}{(x-a)|x-a|} = -\frac{1}{(x+a)^2} + \frac{1}{(x-a)^2} = \frac{4ax}{(x+a)^2(x-a)^2} \approx \frac{4a}{x^3}$$

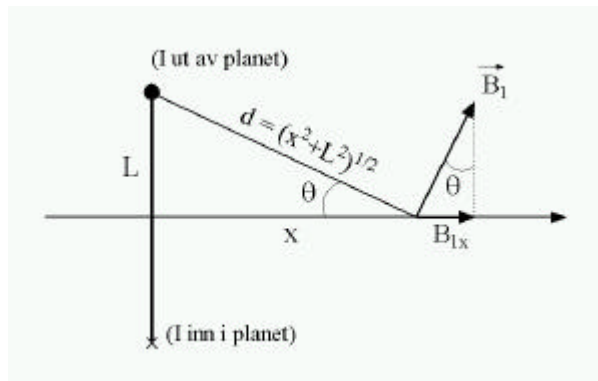
$$\Rightarrow |x| \gg a : \frac{1}{(x+a)|x+a|} - \frac{1}{(x-a)|x-a|} \approx \frac{4a}{|x|^3}$$

$$\Rightarrow \vec{E}(x) \approx \frac{4qa\hat{x}}{4\pi\epsilon_0|x|^3} = \frac{\vec{p}}{2\pi\epsilon_0|x|^3} \quad \text{da} \quad \vec{p} = q \cdot 2a\hat{x}$$

b)

Feltlinjer for magnetfeltet i xz-planet:





Magnetfelt fra en sidekant:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi d} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{d^2}{L^2}}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi \sqrt{x^2 + L^2}} \frac{1}{\sqrt{2 + \frac{x^2}{L^2}}}$$

De 4 sidekantene bidrar med samme B_1 på x-aksen, og parvis med retning slik at

$$\vec{B} = 4B_{1x} \hat{x}$$

med

$$B_{1x} = B_1 \sin \theta = B_1 \frac{L}{d} = B_1 \frac{L}{\sqrt{x^2 + L^2}}$$

Dermed:

$$\vec{B} = \frac{4\mu_0 I}{2\pi \sqrt{x^2 + L^2}} \frac{1}{\sqrt{2 + \frac{x^2}{L^2}}} \frac{L}{\sqrt{x^2 + L^2}} \hat{x} = \frac{2\mu_0 IL}{\pi (x^2 + L^2) \sqrt{2 + \frac{x^2}{L^2}}} \hat{x}$$

$$|x| \gg L : x^2 + L^2 \approx x^2, \quad \sqrt{2 + \frac{x^2}{L^2}} \approx \frac{|x|}{L}$$

$$\Rightarrow \vec{B} \approx \frac{2\mu_0 IL^2}{\pi |x|^3} \hat{x} = \frac{\mu_0 \vec{m}}{2\pi |x|^3} \quad \text{da} \quad \vec{m} = I\vec{A} = 4IL^2 \hat{x}$$

c)

Først E-feltet:

$$|x| \ll a : \frac{1}{(x+a)|x+a|} = \frac{1}{(x+a)^2} = \frac{1}{a^2} \left(1 + \frac{x}{a}\right)^{-2} = \frac{1}{a^2} \left(1 - 2\frac{x}{a} + 3\frac{x^2}{a^2} \dots\right)$$

$$\frac{1}{(x-a)|x-a|} = -\frac{1}{(x-a)^2} = -\frac{1}{a^2} \left(1 - \frac{x}{a}\right)^{-2} = -\frac{1}{a^2} \left(1 + 2\frac{x}{a} + 3\frac{x^2}{a^2} \dots\right)$$

$$\Rightarrow \vec{E} = -\frac{q\hat{x}}{4\pi\epsilon_0 a^2} \left(1 - 2\frac{x}{a} + 3\frac{x^2}{a^2} \dots + 1 + 2\frac{x}{a} + 3\frac{x^2}{a^2} \dots\right) \approx \hat{x} \left(-\frac{q}{2\pi\epsilon_0 a^2}\right) \left(1 + \frac{3}{a^2} x^2 \dots\right)$$

$$\Rightarrow E_0 = -\frac{q}{2\pi\epsilon_0 a^2}, \quad a = \frac{3}{a^2}, \quad n = 2$$

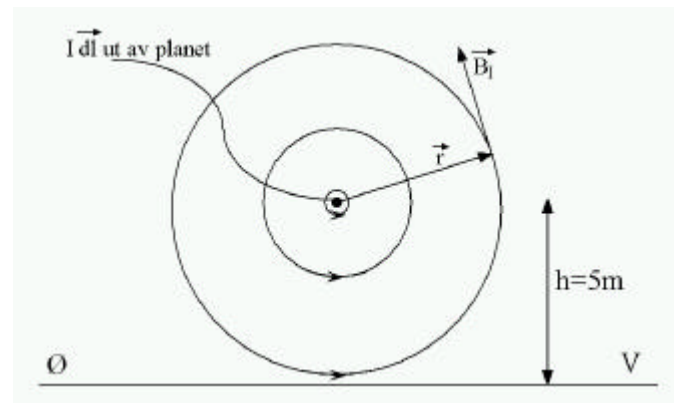
Deretter B-feltet:

$$\begin{aligned}
 |x| \ll a : (x^2 + L^2)^{-1} &= \frac{1}{L^2} \left(1 + \frac{x^2}{L^2} \right)^{-1} = \frac{1}{L^2} \left(1 - \frac{x^2}{L^2} \dots \right) \\
 \left(2 + \frac{x^2}{L^2} \right)^{-1/2} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{x^2}{2L^2} \right)^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{x^2}{4L^2} \dots \right) \\
 \Rightarrow \vec{B} &= \frac{2m_0 I L}{pL^2 \sqrt{2}} \left(1 - \frac{x^2}{L^2} \dots \right) \left(1 - \frac{x^2}{4L^2} \dots \right) \hat{x} \approx \hat{x} \left(\frac{\sqrt{2} m_0 I}{pL} \right) \left(1 - \frac{5}{4L^2} x^2 \right) \\
 \Rightarrow B_0 &= \frac{\sqrt{2} m_0 I}{pL} \quad , \quad b = -\frac{5}{4L^2} \quad , \quad m = 2
 \end{aligned}$$

OPPGAVE 3

a)

$\vec{B}_I \propto Id\vec{l} \times \vec{r} \Rightarrow$ sirkulære feltlinjer, konsentriske med kableen:

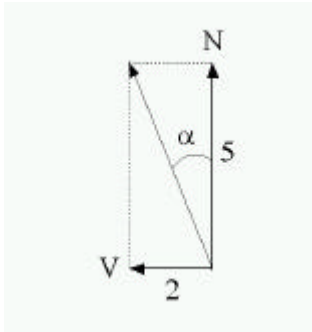


Her kan $B(h)$ utledes fra Amperes lov, $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = m_0 I \Rightarrow B \cdot 2\pi h = m_0 I$. Alternativt kan en bruke det oppgitte uttrykket for B i oppgave 2, med $L \rightarrow \infty$. Et tredje alternativ er å slå opp i Øgrim og Lian: $H = \frac{I}{2\pi h}$, $B = m_0 H = \frac{m_0 I}{2\pi h}$. Endelig kan $B(h)$ beregnes direkte fra uttrykket for magnetfelt fra strømførende leder, gitt i formelvedlegget.

Ved bakken:

$$B_I = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 400}{2\pi \cdot 5} \text{ T} = 1.6 \cdot 10^{-5} \text{ T}$$

Retning på $\vec{B}_I$ (se figuren over): mot vest.



1m over bakken:

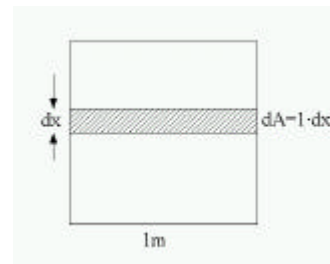
$$B_I = \frac{4p \cdot 10^{-7} \cdot 400}{2p \cdot 4} T = 2 \cdot 10^{-5} T(\hat{V})$$

$$B_J = 5 \cdot 10^{-5} T(\hat{N})$$

Avvik i forhold til nord: $\tan \alpha = 2/5 \Rightarrow \alpha = 21.8^\circ \approx \underline{22^\circ}$

b)

$E(t) = -d\phi_B/dt$, $\phi_B = N \int \vec{B}_I \cdot d\vec{A}$ (kan se bort fra $\vec{B}_J$ da $\dot{\vec{B}}_J = 0$)



$$\Rightarrow f_B = \frac{Nm_0 I}{2p} \cdot 1 \cdot \int_4^5 \frac{dx}{x} = \frac{Nm_0 I}{2p} \ln \frac{5}{4} = \frac{Nm_0 I_0}{2p} \ln \frac{5}{4} \cos \omega t$$

$$\Rightarrow E(t) = \frac{Nwm_0 I_0}{2p} \ln \frac{5}{4} \sin \omega t = \frac{500 \cdot 2p \cdot 50 \cdot 4p \cdot 10^{-7} \cdot 800}{2p} \ln \frac{5}{4} \sin \omega t$$

$$= 8p \ln \frac{5}{4} \sin \omega t = \underline{(5.6V) \sin \omega t}$$

(Magnetfeltet endrer seg bare langsomt i vertikalretningen gjennom spolen. Vi gjør derfor bare en ubetydelig feil ved å sette

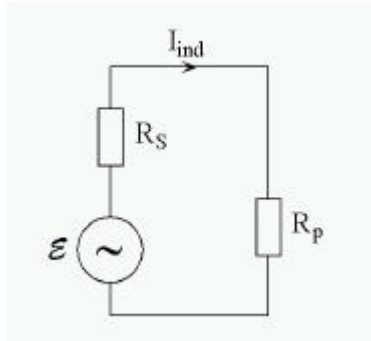
$$B_I \approx \frac{m_0 I}{2p \langle x \rangle} \text{ med } \langle x \rangle = 4.5\text{m, og deretter}$$

$$f_B \approx \frac{Nm_0 I}{2p \langle x \rangle} \cdot A = \frac{500 \cdot 4p \cdot 10^{-7} \cdot 800}{2p \cdot 4.5} \cdot 1 \text{ Tm}^2 \cdot \cos \omega t$$

c)

$$R_s = \frac{l}{sS} = \frac{4\text{m} \cdot 500}{5.8 \cdot 10^7 \Omega^{-1} \text{m}^{-1} \cdot 3.45 \cdot 10^{-6} \text{m}^2} = \underline{10\Omega}$$

Kretsen blir altså en vekselspenningskilde med indre motstand R_S , koblet til en motstand R_p :



Indusert strøm i kretsen:

$$I_{ind}(t) = \frac{E(t)}{R_S + R_p} = \left(\frac{5.6}{20} \text{ A} \right) \sin \omega t$$

$$\Rightarrow P(t) = V_p(t) I_{ind}(t) = R_p I_{ind}^2(t) = \frac{R_p}{(R_S + R_p)^2} E(t)^2$$

$$\Rightarrow \bar{P} = \frac{\omega}{2\pi} \frac{R_p}{(R_S + R_p)^2} \cdot (5.6 \text{ V})^2 \cdot \int_0^{2\pi/\omega} \frac{1}{2} (1 - \cos 2\omega t) dt$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{40\Omega} \cdot 5.6^2 \text{ V}^2 = \underline{0.39 \text{ W}}$$

(der det er brukt at $\sin^2 \omega t = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\omega t)$, slik at integralet blir π/ω)

(Kommentar: En slik spole vil ha en ikke ubetydelig selvinduktans L , slik at det induktive bidraget til impedansen, ωL , egentlig ikke kan neglisjeres ved den aktuelle frekvensen. Det betyr at oppnåelig effekt i lyspæra blir enda mindre enn det som er beregnet ovenfor. Ettersom L er proporsjonal med kvadratet av antall viklinger, ville det ha vært lurere å bruke større areal og færre viklinger på spolen. Alternativt kunne det induktive bidraget til impedansen blitt eliminert fullstendig ved i tillegg å seriekoble en kapasitans, slik at $\omega L - 1/\omega C = 0$.)