

Løsningsforslag, Midtsemesterprøve torsdag 6. mars 2008 kl 1000 – 1200.

Fasit side 12.

Oppgavene med kort løsningsskisse

1) Hvilken påstand er feil?

C En kondensators kapasitans øker lineært med ladningen på kondensatoren.

En kondensators kapasitans avhenger ikke av ladningen på kondensatoren.

(59% svarte riktig.)

2) Hvilken påstand er riktig?

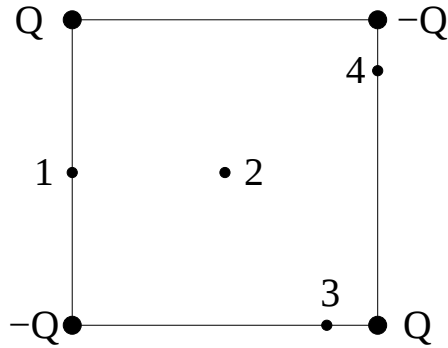
D Elektrisk polarisering kan måles i enheten C/m^2 .

Polarisering er dipolmoment pr volumenhet, og dipolmoment har enhet som ladning multiplisert med lengde.

(85% svarte riktig.)

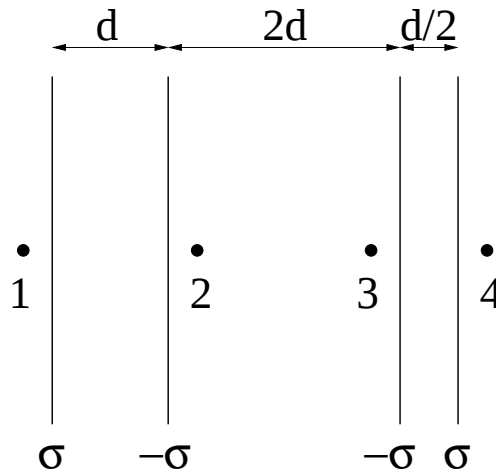
3) Fire punktladninger, to positive (Q) og to negative ($-Q$), er plassert i hvert sitt hjørne av et kvadrat. Ranger det elektriske potensialet i de fire punktene 1, 2, 3 og 4. (Punkt 1 er midt på venstre "sidekant", punkt 2 er midt i kvadratet.)

C $V_3 > V_1 = V_2 > V_4$



Planet gjennom 1 og 2 samt planet gjennom 2 som står vinkelrett på det første har begge null potensial, fordi alle posisjoner i disse to planene har parvis like store avstander til en positiv og en negativ ladning. Videre har vi høyt potensial i nærheten av en positiv ladning og lavt potensial i nærheten av en negativ ladning. Dermed må vi ha $V_4 < 0$ og $V_3 > 0$, og som sagt $V_1 = V_2 = 0$. (72% svarte riktig.)

4) Fire store parallelle plan har innbyrdes avstand d , $2d$ og $d/2$ som vist i figuren. Planene har ladning pr flateenhet σ , $-\sigma$, $-\sigma$ og σ (fra venstre mot høyre, og $\sigma > 0$). Ranger det elektriske potensialet i de fire punktene merket med 1, 2, 3 og 4.

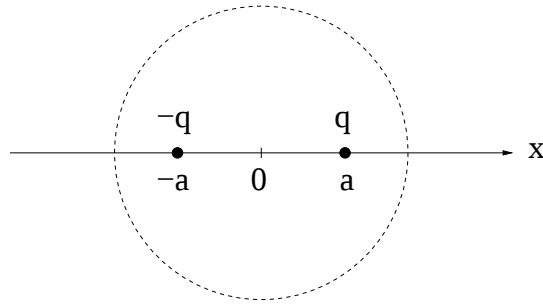


B $V_1 > V_4 > V_2 = V_3$

Mellom de to planene lengst til venstre har vi elektrisk feltstyrke σ/ϵ_0 , med retning mot høyre, mellom de to planene lengst til høyre ditto feltstyrke, men med retning mot venstre. Forøvrig er $E = 0$. Dermed avtar potensialet med $\sigma d/\epsilon_0$ fra 1 til 2, forblir konstant fra 2 til 3, og øker med $\sigma d/2\epsilon_0$ fra 3 til 4. Følgelig alternativ B. (29% svarte riktig.)

5) To punktladninger $\pm q$ er plassert i $x = \pm a$ ($y = z = 0$). Hva blir netto elektrisk fluks gjennom en kuleflate med radius $3a/2$ og sentrum i origo?

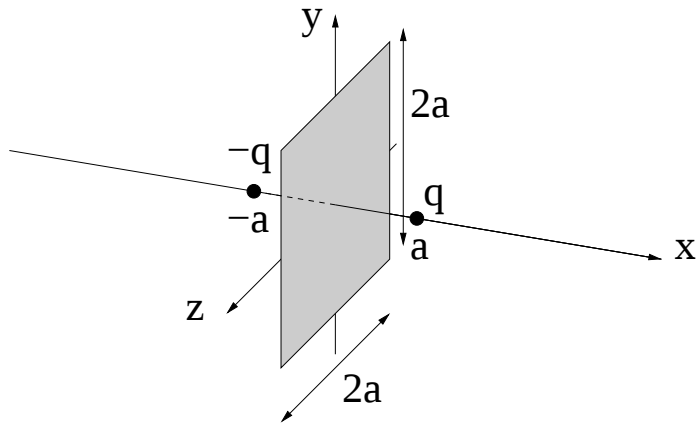
B 0



Gauss' lov: Null netto ladning innenfor kuleskallet gir null netto elektrisk fluks gjennom kuleskallet. (94% svarte riktig.)

6) To punktladninger $\pm q$ er plassert i $x = \pm a$ ($y = z = 0$). Hva blir netto elektrisk fluks gjennom den delen av yz -planet som avgrenses av $-a \leq y \leq a$, $-a \leq z \leq a$ (og $x = 0$)?

D $q/3\epsilon_0$



Det skraverte planet utgjør $1/6$ av overflaten av en terning med sidekanter $2a$, der vi kan tenke oss både q og $-q$ i sentrum av terningen. Symmetribetraktninger gir dermed at en fluks $q/6\epsilon_0$ fra hver av de to ladningene passerer gjennom det skraverte planet, i begge tilfeller fra høyre mot venstre. Alt i alt en fluks $q/3\epsilon_0$ gjennom planet. (33% svarte riktig.)

7) Det elektriske feltet i et område er

$$\mathbf{E}(x, z) = \hat{x} E_0 \cos kx - \hat{z} E_0 \sin kz,$$

der k og E_0 er konstanter. Hva er da potensialforskjellen mellom origo og punktet $(\pi/k, \pi/k, \pi/k)$, dvs

$$\Delta V = V\left(\frac{\pi}{k}, \frac{\pi}{k}, \frac{\pi}{k}\right) - V(0, 0, 0)?$$

D $\Delta V = 2E_0/k$

Forflytningen i x -retning gir en potensialendring

$$\Delta V_1 = - \int_0^{\pi/k} E_0 \cos kx \, dx = 0$$

Forflytningen i y -retning gir null potensialendring ettersom det elektriske feltet ikke har noen y -komponent. Endelig gir forflytningen i z -retning en potensialendring

$$\Delta V_3 = - \int_0^{\pi/k} (-E_0 \sin kz) dz = - \Big|_0^{\pi/k} \frac{E_0}{k} \cos kz = \frac{2E_0}{k}$$

som da også blir den totale potensialendringen ΔV .
(54% svarte riktig.)

8) Potensialet i et område er

$$V(y) = k V_0 y,$$

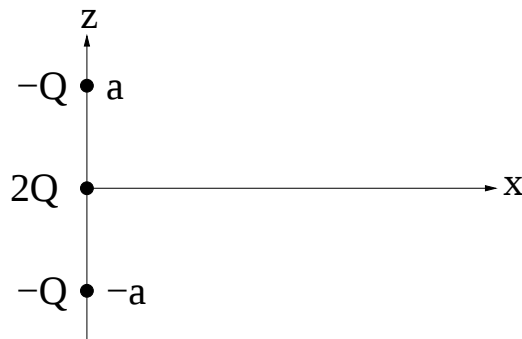
der k og V_0 er konstanter. Hvor mye potensiell elektrisk energi U_E befinner seg da i volumet avgrenset av

$$0 \leq x \leq \pi/k \quad , \quad 0 \leq y \leq \pi/k \quad , \quad 0 \leq z \leq \pi/k \quad ?$$

A $U_E = \varepsilon_0 V_0^2 \pi^3 / 2k$

Det oppgitte potensialet betyr at det elektriske feltet er $-k V_0 \hat{y}$, slik at energien pr volumenhet er $u_E = \varepsilon_0 E^2 / 2 = \varepsilon_0 k^2 V_0^2 / 2$. Det oppgitte området har volum $(\pi/k)^3$, slik at den elektriske energien i dette området blir $U_E = \varepsilon_0 V_0^2 \pi^3 / 2k$.
(71% svarte riktig.)

9) Figuren viser et system med 3 punktladninger lokalisert på z -aksen: $-Q$ i $z = -a$ og i $z = a$, og $2Q$ i $z = 0$. Hva er dette systemets elektriske dipolmoment $\mathbf{p}$?



A $\mathbf{p} = 0$

Dette kan vi se for oss som to dipoler med motsatt retning, følgelig totalt dipolmoment null.
(84% svarte riktig.)

10) Hva er det elektriske feltet $\mathbf{E}(x)$ på den positive x -aksen i oppgave 9?

D $\mathbf{E}(x) = \frac{Q\hat{x}}{2\pi\varepsilon_0} \left[\frac{1}{x^2} - \frac{x}{(x^2 + a^2)^{3/2}} \right]$

Vi kan uten videre stryke alternativene A og B ettersom vi der har samme fortegn på bidragene

inne i parentesen. Videre må vi multiplisere bidragene fra de to negative ladningene med en faktor $x/\sqrt{x^2 + a^2}$ for å finne x -komponenten. Dermed ser vi at alternativ D er eneste mulighet.
(46% svarte riktig.)

11) Langt ute på den positive x -aksen (dvs $x \gg a$) kan potensialet $V(x)$ i oppgave 9 tilnærmet skrives som

$$\text{C} \quad V(x) \simeq \frac{Qa^2}{4\pi\epsilon_0 x^3}$$

Her har vi minst et par muligheter: Vi kan summere bidragene fra de tre ladningene og finne ”ledende ordens” bidrag for store verdier av x . Alternativt kan vi innse at potensialet fra dette systemet må avta *raskere* enn potensialet fra en dipol. Da potensialet fra en dipol avtar som $1/x^2$ for store avstander x , må vi her velge alternativ C.
(22% svarte riktig.)

12) Systemet i oppgave 9 har potensiell energi

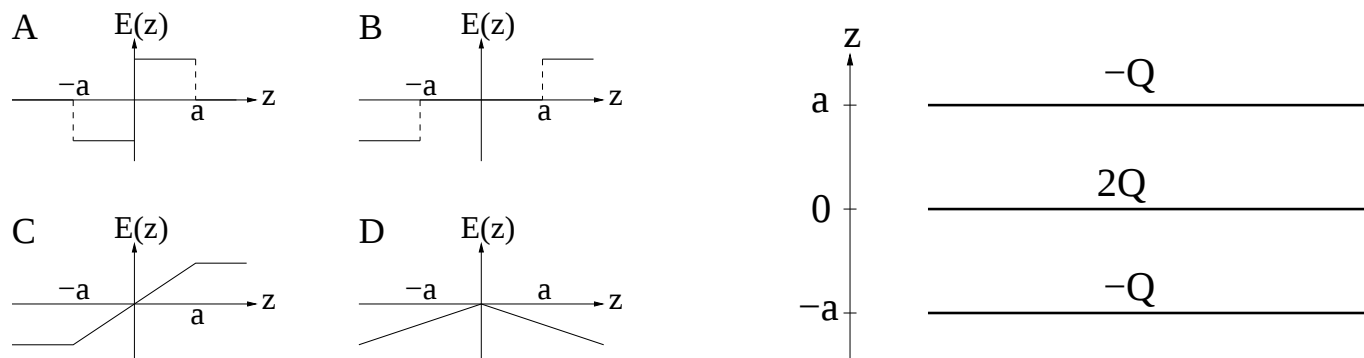
$$\text{D} \quad U = -\frac{7Q^2}{8\pi\epsilon_0 a}$$

Med tre punktladninger har vi 3 ladningspar som bidrar til total energi:

$$U = -2 \cdot 2Q^2 4\pi\epsilon_0 a + \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 \cdot 2a} = -\frac{7Q^2}{8\pi\epsilon_0 a}$$

(75% svarte riktig.)

13) Tre tynne uniformt ladete store parallelle metallplater med areal A og ladning $-Q, 2Q, -Q$ er lokalisert i $z = -a, 0, a$, som vist i figuren til høyre. Hvilken graf viser korrekt resulterende elektrisk felt $E(z)$ (slik at $\mathbf{E}(z) = E(z) \hat{z}$)?



Legger vi sammen elektriske feltbidrag fra de 3 planene, finner vi ut at det totale feltet er $Q/\varepsilon_0 A$ mellom $z = -a$ og $z = a$, med retning oppover for $z > 0$ og retning nedover for $z < 0$. Følgelig er graf A den riktige.
(84% svarte riktig.)

14) Hva er total potensiell energi for de tre ladete platene i oppgave 13?

$$D \quad U = \frac{Q^2 a}{\varepsilon_0 A}$$

Vi har uniform energitetthet lik $\varepsilon_0 E^2/2 = Q^2/2\varepsilon_0 A^2$ i hele volumet mellom nederste og øverste plate. Total energi blir dermed

$$U = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 A^2} \cdot 2a \cdot A = \frac{Q^2 a}{\varepsilon_0 A}$$

(72% svarte riktig.)

15) For systemet i oppgave 13 settes potensialet lik null på den nederste platen, dvs $V(-a) = 0$. Hva er da potensialene $V(0)$ og $V(a)$ på henholdsvis midtre og øverste plate?

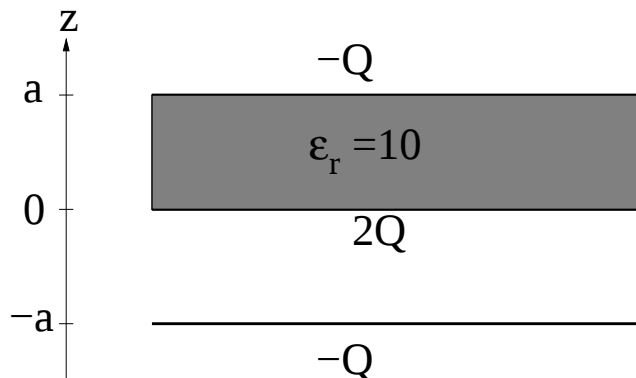
$$A \quad V(0) = \frac{Qa}{\varepsilon_0 A}, \quad V(a) = 0$$

Potensialet øker med $Qa/\varepsilon_0 A$ fra nederste til midtre plate, for så å avta med samme beløp fra midtre til øverste plate. Følgelig alternativ A.

(69% svarte riktig.)

16) I systemet i oppgave 13 fylles volumet mellom midtre og øverste plate med en dielektrisk skive med relativ permittivitet $\varepsilon_r = 10$. Hva blir nå potensialforskjellen $\Delta V = V(a) - V(-a)$ mellom øverste og nederste plate?

$$B \quad \Delta V = \frac{9Qa}{10\varepsilon_0 A}$$

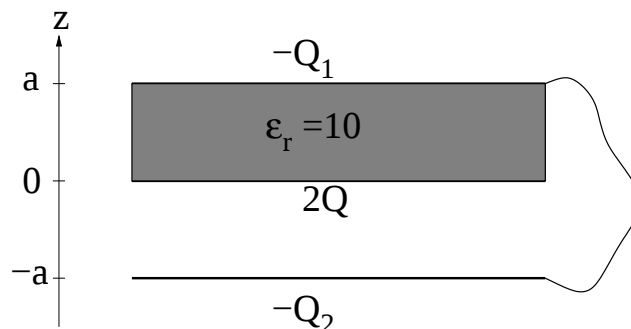


Den elektriske feltstyrken er nå redusert med en faktor 10 i volumet mellom midtre og øverste plate, sammenlignet med før vi satte inn den dielektriske skiva. Følgelig avtar potensialet bare med $Qa/10\epsilon_0 A$ når vi går fra midtre til øverste plate. Dermed blir potensialforskjellen mellom øverste og nederste plate $9Qa/10\epsilon_0 A$.

(72% svarte riktig.)

17) Øverste og nederste plate i oppgave 16 forbindes med en tynn elektrisk leder slik at de to platene oppnår samme elektriske potensial. Bestem resulterende ladning $-Q_1$ og $-Q_2$ på henholdsvis øverste og nederste plate. (Du kan anta at den tynne lederen som forbinder de to platene hele tiden er elektrisk nøytral.)

A $-Q_1 = -20Q/11, -Q_2 = -2Q/11$



Samme potensial på øverste og nederste plate innebærer at vi må ha samme elektriske feltstyrke i øvre halvdel (der vi har dielektrikum) som i nedre halvdel (der vi har luft/vakuum), men med motsatt retning. Vi legger sammen bidragene fra de tre platene, og finner:

$$\frac{2Q}{2A\epsilon_0 \cdot 10} + \frac{Q_1}{2A\epsilon_0 \cdot 10} - \frac{Q_2}{2A\epsilon_0 \cdot 10} = \frac{2Q}{2A\epsilon_0} + \frac{Q_2}{2A\epsilon_0} - \frac{Q_1}{2A\epsilon_0}$$

Dessuten må vi selvsagt ha

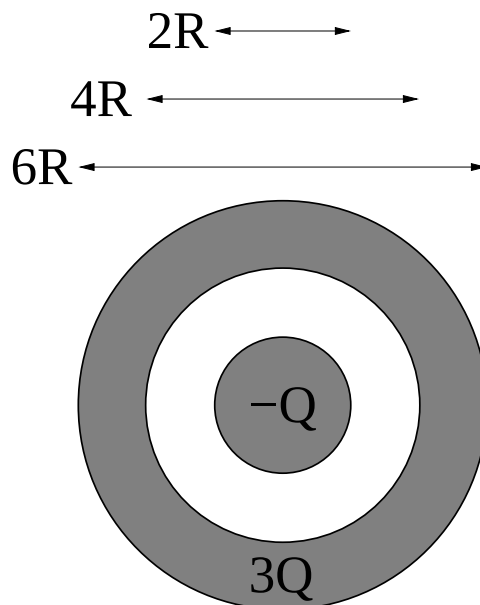
$$Q_1 + Q_2 = 2Q$$

Løser vi disse to ligningene med hensyn på de to ukjente ladningene, finner vi $Q_1 = 20Q/11$ og $Q_2 = 2Q/11$.

(52% svarte riktig.)

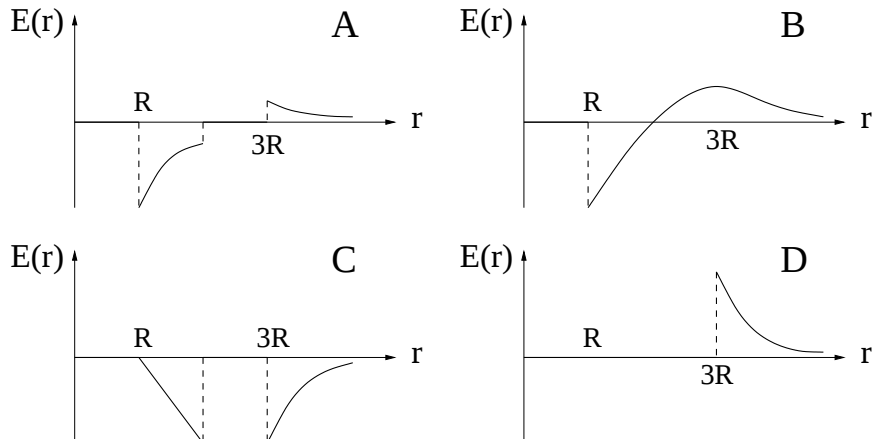
18) Ei metallkule med radius R og (negativ) ladning $-Q$ er omgitt av et vakuumsjikt med tykkelse R fulgt av et metallisk kuleskall med tykkelse R og ladning $3Q$. Hvor mye ladning befinner seg på kuleskallets ytre overflate?

C $2Q$



Gauss' lov med gaussflate inne i det metalliske kuleskallet gir at en ladning Q må ligge på indre overflate. Dermed blir det igjen $2Q$ på ytre overflate.
(98% svarte riktig.)

19) Hvilken graf viser korrekt $E(r)$ (slik at $\mathbf{E}(r) = E(r) \hat{r}$) for systemet i oppgave 18?



Her skal det vel litt fantasi til for å foreslå noe *annet* enn alternativ A.
(89% svarte riktig.)

20) Hva er potensialforskjellen mellom kuleskallet og et punkt som ligger i avstand $6R$ fra sentrum av systemet i oppgave 18, dvs $\Delta V = V(r = 3R) - V(r = 6R)$?

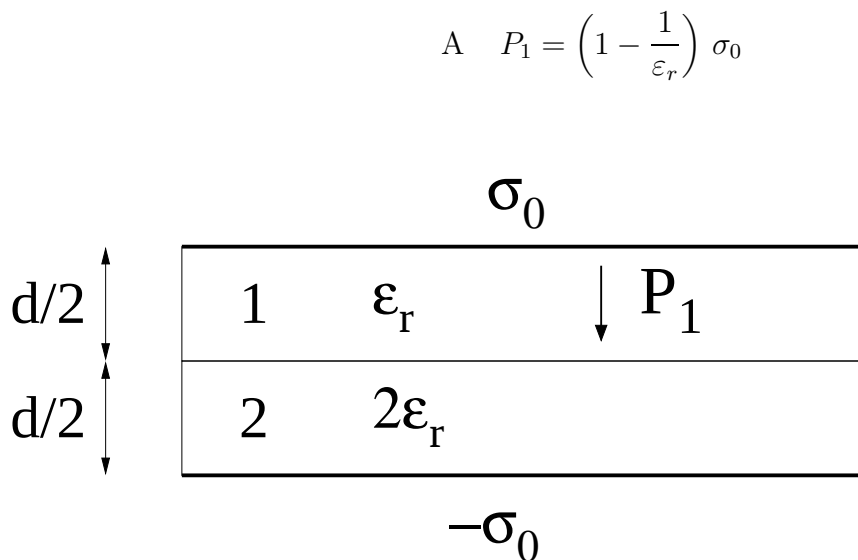
C $\Delta V = Q/12\pi\epsilon_0 R$

Utenfor kuleskallet er $E(r) = 2Q/4\epsilon_0 r^2$, slik at

$$\Delta V = - \int_{6R}^{3R} \frac{2Q dr}{4\epsilon_0 r^2} = \frac{Q}{12\pi\epsilon_0 R}$$

(67% svarte riktig.)

21) To store metalliske plan har areal A og ladning pr flateenhet henholdsvis σ_0 (øverste plate) og $-\sigma_0$ (nederste plate). Plateavstanden er d . Volumet mellom metallplatene er fylt med to dielektriske skiver. Medium 1, i øverste halvdel, har relativ permittivitet ϵ_r mens medium 2, i nederste halvdel, har relativ permittivitet $2\epsilon_r$. Hvor stor blir polariseringen P_1 i medium 1?



$$P_1 = \chi_1 \epsilon_0 E_1 = (\epsilon_r - 1) \epsilon_0 \cdot \frac{D}{\epsilon_r \epsilon_0} = (1 - 1/\epsilon_r) \sigma_0$$

der vi har brukt at den elektriske forskyvningen $D = \sigma_0$ (den samme i hele volumet mellom metallplatene).

(69% svarte riktig.)

22) Hva blir kapasitansen C til parallellplatekondensatoren i oppgave 21? (Tips: Dette kan betraktes som en seriekobling av to kapasitanser.)

B $C = 4\epsilon_r \epsilon_0 A / 3d$

Kapasitansen til øverste halvdel:

$$C_1 = \epsilon_r \epsilon_0 A / (d/2)$$

Kapasitansen til nederste halvdel:

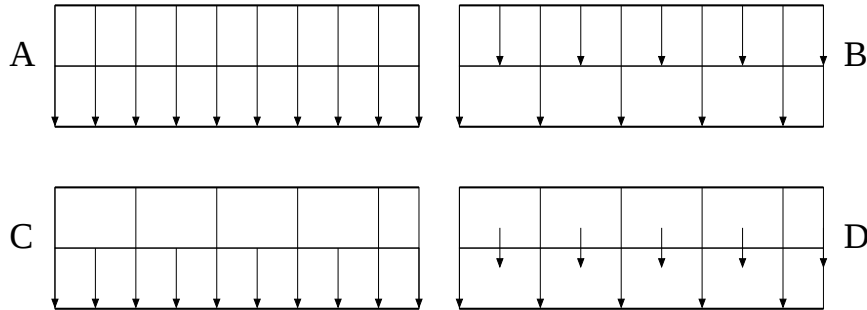
$$C_2 = 2\epsilon_r \epsilon_0 A / (d/2)$$

Total kapasitans til to seriekoblede kapasitanser finner vi deretter ved å ta den inverse av summen av inverse enkeltkapasitanser:

$$C = (1/C_1 + 1/C_2)^{-1} = 4\epsilon_r\epsilon_0 A/3d$$

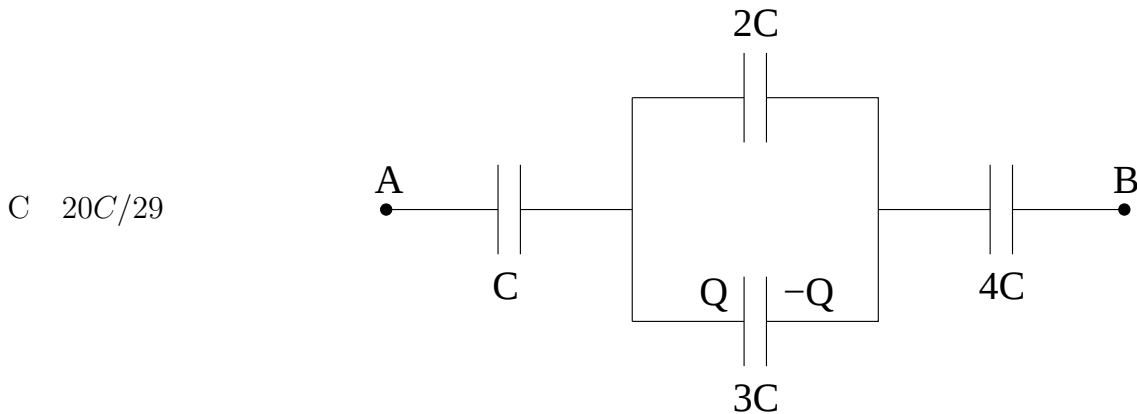
(80% svarte riktig.)

23) Hvilken av figurene nedenfor illustrerer feltlinjer for det elektriske feltet $\mathbf{E}$ i parallellplatekondensatoren i oppgave 21?



Svakere elektrisk felt der vi har størst relativ permittivitet. Altså alternativ B.
(79% svarte riktig.)

24) Figuren viser en sammenkobling av 4 kapasitanser, C , $2C$, $3C$ og $4C$. Hva blir total kapasitans for hele sammenkoblingen?



De to parallellkoblede i midten har til sammen kapasitans $5C$. Dermed:

$$C_{\text{total}} = (1/C + 1/5C + 1/4C)^{-1} = 20C/29$$

(86% svarte riktig.)

25) Anta at det mellom endepunktene A og B i oppgave 24 er en potensialforskjell $V_0 = V_A - V_B$. Hvor mye ladning $(\pm)Q$ befinner seg da på kapasitansen $3C$?

D $Q = 12V_0C/29$

La oss kalle ladningen på C og $4C$ for Q_0 . Med Q på $3C$ blir det da ladning $Q_0 - Q$ på $2C$. Samme potensialforskjell over $2C$ og $3C$ gir da ligningen

$$\frac{Q}{3C} = \frac{Q_0 - Q}{2C}$$

dvs

$$Q = \frac{3}{5}Q_0$$

og

$$Q_0 = \frac{5}{3}Q$$

Total potensialforskjell V_0 fra A til B gir

$$V_0 = \frac{5Q}{3C} + \frac{Q}{3C} + \frac{5Q}{12C} = \frac{29Q}{12C}$$

og dermed

$$Q = 12V_0C/29$$

(61% svarte riktig.)

FY1003/TFY4155 Elektrisitet og magnetisme/Elektromagnetisme

Midtsemesterprøve torsdag 6. mars 2008 kl 1000 – 1200.

Fasit

Oppgave	A	B	C	D	Oppgave	A	B	C	D
1	☐	☐	☒	☐	14	☐	☐	☐	☒
2	☐	☐	☐	☒	15	☒	☐	☐	☐
3	☐	☐	☒	☐	16	☐	☒	☐	☐
4	☐	☒	☐	☐	17	☒	☐	☐	☐
5	☐	☒	☐	☐	18	☐	☐	☒	☐
6	☐	☐	☐	☒	19	☒	☐	☐	☐
7	☐	☐	☐	☒	20	☐	☐	☒	☐
8	☒	☐	☐	☐	21	☒	☐	☐	☐
9	☒	☐	☐	☐	22	☐	☒	☐	☐
10	☐	☐	☐	☒	23	☐	☒	☐	☐
11	☐	☐	☒	☐	24	☐	☐	☒	☐
12	☐	☐	☐	☒	25	☐	☐	☐	☒
13	☒	☐	☐	☐					