

Løsningsforslag, Midtsemesterprøve fredag 13. mars 2009 kl 1415 – 1615.

Fasit side 10.

Oppgavene med kort løsningsforslag (Versjon A)

1) Hvilken påstand er feil?

B Halvering av ladningen på ei metallkule halverer dens potensielle energi.

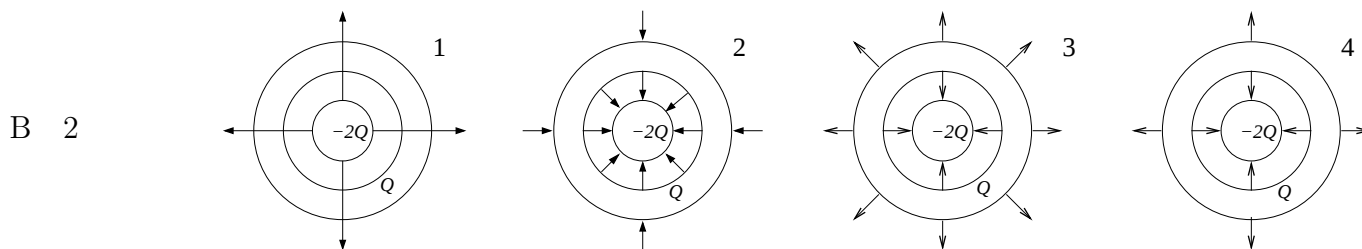
Ettersom $U \sim Q^2$, vil halvering av Q resultere i at potensiell energi U reduseres til fjerdeparten av den opprinnelige verdien. De andre påstandene er alle riktige. (Andel riktige svar: 52 %)

2) To punktladninger $\pm q$ er plassert på z -aksen i $z = \pm a$. Hva blir netto elektrisk fluks gjennom xy -planet?

B q/ε_0

Alle feltlinjer starter på q i $z = a$ og ender på $-q$ i $z = -a$, så netto fluks gjennom xy -planet blir q/ε_0 . Alternativt: Fluks $q/2\varepsilon_0$ fra hver av de to punktladningene krysser xy -planet, "fra høyre mot venstre". (Andel riktige svar: 27 %)

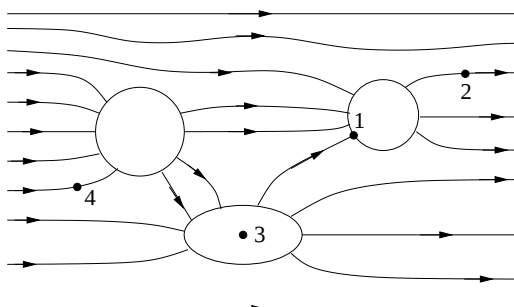
3) Figuren viser en metallkule med netto negativ ladning $-2Q$ omgitt av et luftlag, etterfulgt av et metallisk kuleskall med netto positiv ladning Q . Hvilken figur angir da korrekt feltlinjene for $\mathbf{E}$? (Tips: Gauss' lov.)



Bruk av Gauss' lov gir ladning $-2Q$ på overflaten av kula i midten, ladning $2Q$ på *indre* overflate av kuleskallet, og ladning $-Q$ på *ytre* overflate av kuleskallet. Dermed blir elektrisk felt $E(r) = -2Q/4\pi\varepsilon_0 r^2$ i luftrommet mellom de to lederne og $E(r) = -Q/4\pi\varepsilon_0 r^2$ utenfor kuleskallet. (Dvs, begge steder rettet innover.) (Andel riktige svar: 90 %)

4) Figuren viser tre elektriske ledere og feltlinjer for det elektriske feltet i området omkring disse. Ranger potensialene V_j i de fire angitte posisjonene $j = 1, 2, 3, 4$.

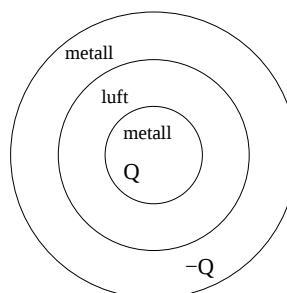
B $V_4 > V_3 > V_1 > V_2$



Det elektriske feltet peker i retning fra høyt mot lavere potensial. (Andel riktige svar: 77 %)

5) Ei metallkule med ladning Q er omgitt av et luftlag, fulgt av et metallisk kuleskall med ladning $-Q$. Hvor mye ladning befinner seg på kuleskallets ytre overflate?

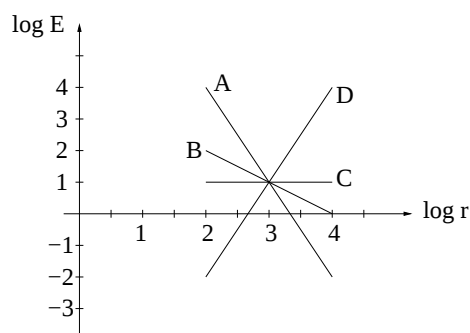
B 0



Gauss' lov gir ladning $-Q$ på kuleskallets indre overflate, og dermed null ladning på ytre overflate. (Andel riktige svar: 85 %)

6) Hvilken graf viser $\log E$ som funksjon av $\log r$ i stor avstand r fra en elektrisk dipol?

A



Den elektriske feltstyrken avtar med avstanden opphøyd i 3. potens i stor avstand fra en elektrisk dipol, dvs $E(r) = A/r^3$. Dermed blir $\log E = \log A - 3 \log r$, dvs stigningstall -3 dersom vi plotter $\log E$ som funksjon av $\log r$. (Andel riktige svar: 55 %)

7) Omtrent hvor mye ladning har alle elektronene i kroppen din til sammen? (Anta at kroppen din inneholder omtrent like mange nøytroner som protoner.)

D noen GC

Siden elektronmassen er mye mindre enn proton- og nøytronmassen, kan vi se bort fra elektronmassen når antall protoner bestemmes. Med kroppsmasse M har vi

$$\begin{aligned} M &= N_e(m_p + m_n) = 2N_em_p \\ \Rightarrow N_e &= M/2m_p \\ &= 75/2 \cdot 1.67 \cdot 10^{-27} \\ &\simeq 2 \cdot 10^{28} \end{aligned}$$

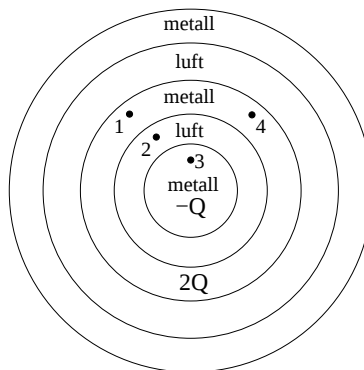
Her må alle likhetstegn oppfattes som ”omtrent lik”, og hvorvidt vi bruker en kroppsmasse på 75, 50 eller 100 kg spiller liten rolle for konklusjonen. Ladningen til samtlige elektroner blir

$$Q_e \simeq N_e \cdot e \simeq 2 \cdot 10^{28} \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \simeq 3 \cdot 10^9$$

dvs noen gigacoulomb (GC). (Andel riktige svar: 64 %)

8) Ei metallkule med ladning $-Q$ er omgitt av et luftlag, deretter et metallisk kuleskall med ladning $2Q$, deretter et luftlag, og endelig et metallisk kuleskall med null netto ladning. Hvor mye ladning befinner seg på det ytterste kuleskallets ytre overflate?

C Q



Gauss' lov gir ladning $-Q$ på ytre kuleskalls indre overflate, og dermed ladning Q på ytre kuleskalls ytre overflate. (Andel riktige svar: 68 %)

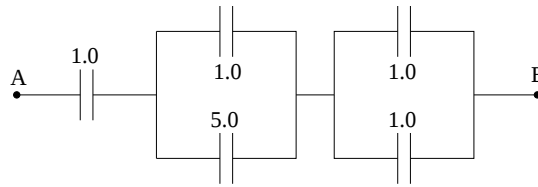
9) I figuren i forrige oppgave er det angitt fire posisjoner (1, 2, 3 og 4). Ranger potensialet i disse fire punktene.

C $V_1 = V_4 > V_2 > V_3$

I det innerste luftlaget er det elektriske feltet rettet innover. Dermed er $V_3 < V_2 < V_1$. Dessuten er 1 og 4 på samme kuleskall, dvs på samme ekvipotensial, og dermed er $V_4 = V_1$. (Andel riktige svar: 83 %)

10) Figuren viser en sammenkobling av fem kapasitanser med verdier i pF som angitt i figuren. Hva blir total kapasitans for hele sammenkoblingen, i enheten pF?

A 0.6



Formler for serie- og parallellkobling av kapasitanser gir

$$C = \left(\frac{1}{1.0} + \frac{1}{1.0 + 5.0} + \frac{1}{1.0 + 1.0} \right)^{-1} = 0.6 \text{ pF}$$

(Andel riktige svar: 85 %)

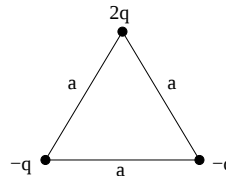
11) Anta at det mellom endepunktene A og B i forrige oppgave er en potensialforskjell på 100 V. Hvor mye ladning ($\pm$) Q , i enheten pC, befinner seg da på kondensatoren med kapasitans 5.0 pF?

D $Q = 50$

Total kapasitans 0.6 pF betyr ladning $\pm Q_0 = \pm 0.6 \cdot 100 = \pm 60$ pC på kondensatoren til venstre. Denne ladningen må videre fordele seg i forholdet 1:5 mellom øvre og nedre kondensator i parallellkoblingen i midten, dvs med 10 pC oppe og 50 pC nede. (Andel riktige svar: 54 %)

12) Tre punktladninger, en positiv ($2q$) og to negative ($-q$), er plassert i hvert sitt hjørne av en likesidet trekant med sidekanter a . Hva er systemets dipolmoment?

C $\sqrt{3}qa$



Bruker $\mathbf{p} = \sum_i \mathbf{r}_i q_i$ med origo for eksempel midt på linjen mellom de to ladningene $-q$. Da blir $p = 2q \cdot h$, der h er høyden fra "grunnlinjen" opp til ladningen $2q$. Ser fra figuren at $h = a \cos 30 = \sqrt{3}a/2$, slik at $p = \sqrt{3}qa$. (Andel riktige svar: 61 %)

13) Hva er den potensielle energien til de tre ladningene i oppgave 12? (Dvs i forhold til om de tre ladningene var uendelig langt fra hverandre.)

A $-3q^2/4\pi\epsilon_0 a$

$$U = \sum_{i < j} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a} ((-1) \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 + (-1) \cdot 2) = -\frac{3q^2}{4\pi\epsilon_0 a}$$

(Andel riktige svar: 73 %)

14) Hva er den elektriske feltstyrken i sentrum av trekanten i oppgave 12?

D $9q/4\pi\epsilon_0 a^2$

Ser at feltet må peke nedover. Alle tre ladninger bidrar med vertikalkomponent nedover. Kan derfor se på bidragene fra $2q$ og (to ganger) $-q$. Trenger avstanden d fra hjørnene til midten:

$$\begin{aligned}\cos 30 &= \frac{a/2}{d} \\ \Rightarrow d &= \frac{a/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{a}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

Dermed blir bidraget fra ladningen $2q$:

$$\frac{2q}{4\pi\epsilon_0(a/\sqrt{3})^2} = \frac{6q}{4\pi\epsilon_0 a^2}$$

Må multiplisere med faktor $\cos 60$ for å få vertikalkomponenten av bidraget fra $-q$:

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0(a/\sqrt{3})^2} \cdot \cos 60 = \frac{3q/2}{4\pi\epsilon_0 a^2}$$

Totalt:

$$\frac{6q + 2 \cdot 3q/2}{4\pi\epsilon_0 a^2} = \frac{9q}{4\pi\epsilon_0 a^2}$$

(Andel riktige svar: 60 %)

15) To tynne konsentriske ledende kuleskall har radius hhv R og $4R$, og ladning hhv Q og $-Q$. Hvor mye energi er lagret i det elektriske feltet i volumet mellom de to kuleskallene?

B $3Q^2/32\pi\epsilon_0 R$

Elektrisk feltstyrke mellom R og $4R$ er $Q/4\pi\epsilon_0 r^2$. Dermed er energitettheten i dette området

$$u_E = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 = \frac{Q^2}{32\pi^2\epsilon_0 r^4}$$

Total energi lagret blir dermed

$$\begin{aligned}U_E &= \int u_E dV \\ &= \int_R^{4R} \frac{Q^2}{32\pi^2\epsilon_0 r^4} \cdot 4\pi r^2 dr \\ &= \frac{3Q^2}{32\pi\epsilon_0 R}\end{aligned}$$

(Andel riktige svar: 52 %)

16) Hva er kapasitansen til kulekondensatoren i forrige oppgave?

D $16\pi\epsilon_0 R/3$

Potensialforskjell mellom R og $4R$:

$$\Delta V = V(R) - V(4R) = - \int_{4R}^R E(r) dr = \frac{3Q}{16\pi\epsilon_0 R}$$

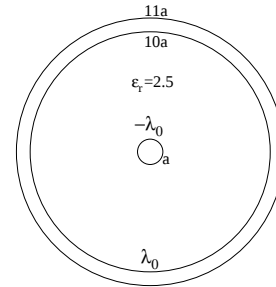
slik at kapasitansen blir

$$C = Q/\Delta V = 16\pi\epsilon_0 R/3$$

(Andel riktige svar: 61 %)

17) En koaksialkabel består av en indre leder med radius a og en ytre ”rørformet” leder med indre radius $10a$ og ytre radius $11a$. Figuren viser et tverrsnitt gjennom kabelen, som kan antas å være rett og tilnærmet uendelig lang. Rommet mellom de to lederne ($a < r < 10a$) består av et dielektrikum med relativ permittivitet 2.5. Anta at indre og ytre leder har ladning hhv $-\lambda_0$ og λ_0 pr lengdeenhet. Hvor er ladningen på indre og ytre leder lokalisert?

A Ved $r = a$ og $r = 10a$.



Gauss' lov gir at ladningen $-\lambda_0$ må ligge på senterlederens overflate (og av symmetrigrunner, jevnt fordelt der), dvs ved $r = a$, og videre at ladningen λ_0 må ligge jevnt fordelt på ytre leders indre overflate, dvs ved $r = 10a$. (Andel riktige svar: 67 %)

18) Hva er den elektriske feltstyrken $E(r)$ i området $a < r < 10a$ for koaksialkabelen i oppgave 17?

A $\lambda_0/5\pi\epsilon_0 r$

Gauss' lov med sylinder med radius r og lengde L som gaussflate gir

$$D(r) \cdot 2\pi r \cdot L = -\lambda_0 \cdot L$$

dvs

$$D(r) = -\frac{\lambda_0}{2\pi r}$$

i området mellom de to lederne. Her betyr minustegnet at feltene peker innover. Dermed, siden $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$, har vi

$$E(r) = D(r)/\epsilon = -\frac{\lambda_0}{5\pi\epsilon_0 r}$$

Feltstyrken definerer vi som vanlig uten fortegn, dermed alternativ A. (Andel riktige svar: 43 %)

19) Hvor stor er kapasitansen pr lengdeenhet for koaksialkabelen i oppgave 17?

D 60 pF/m

Potensialforskjell mellom de to lederne:

$$\Delta V = V(10a) - V(a) = - \int_a^{10a} E(r) dr = \frac{\lambda_0}{5\pi\epsilon_0} \int_a^{10a} \frac{dr}{r} = \frac{\lambda_0 \ln 10}{5\pi\epsilon_0}$$

Ettersom λ_0 nettopp er ladning *pr lengdeenhet*, blir kapasitansen pr lengdeenhet

$$\frac{\lambda_0}{\Delta V} = \frac{5\pi\epsilon_0}{\ln 10} \simeq 60 \text{ pF/m}$$

(Andel riktige svar: 38 %)

20) En lang tynn tråd ligger langs x -aksen og har ladning

$$\lambda(x) = \lambda_0 \frac{e^{-\alpha|x|}}{\alpha x}$$

pr lengdeenhet. Her er λ_0 og α konstanter. Anta at tråden kan regnes som uendelig lang. Hva blir da trådens dipolmoment?

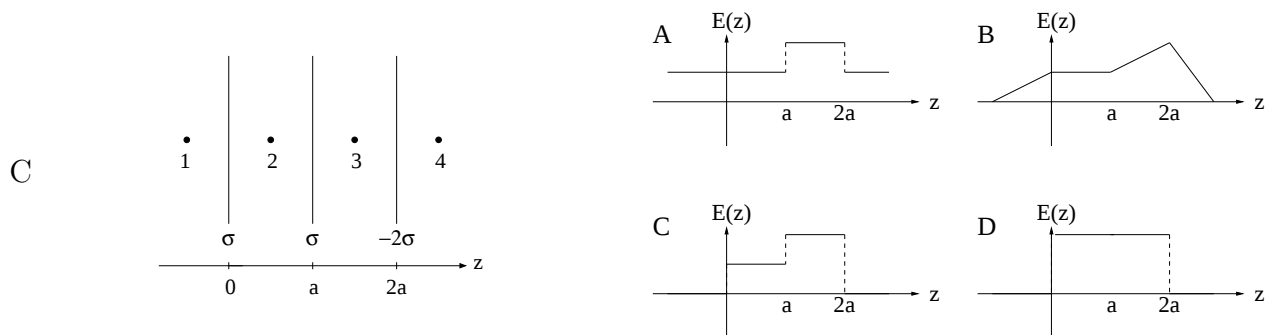
D $2\lambda_0/\alpha^2$

Ser at $\mathbf{p}$ må peke i x -retning. Dermed:

$$p = \int_{-\infty}^{\infty} x \lambda(x) dx = \frac{\lambda_0}{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|x|} dx = \frac{2\lambda_0}{\alpha} \Big|_0^{\infty} \left(-\frac{1}{\alpha}\right) e^{-\alpha x} = \frac{2\lambda_0}{\alpha^2}$$

(Andel riktige svar: 55 %)

21) Tre store parallelle plan har innbyrdes avstand a som vist i figuren nedenfor, til venstre. Planene har ladning pr flateenhet σ , σ , og -2σ (fra venstre mot høyre, og $\sigma > 0$). Det elektriske feltet kan skrives på formen $\mathbf{E}(z) = E(z) \hat{z}$. Hvilken figur (nedenfor, til høyre) viser korrekt $E(z)$?



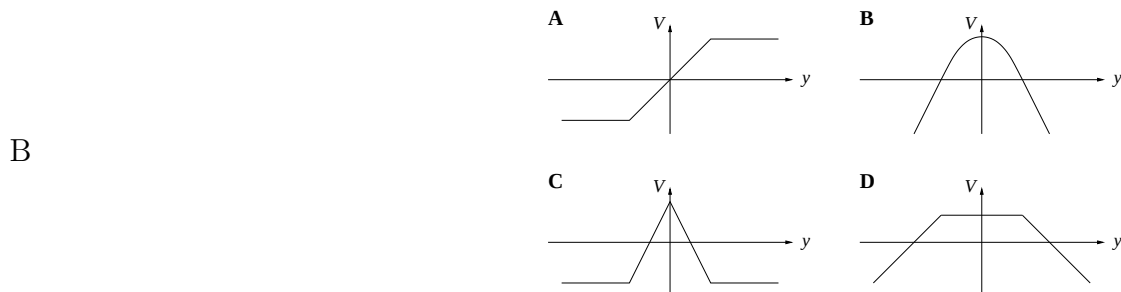
Plan med ladning σ pr flateenhet gir elektrisk felt $E = -\sigma/2\epsilon_0$ til venstre for planet og $+\sigma/2\epsilon_0$ til høyre for planet, mens plan med ladning -2σ pr flateenhet gir elektrisk felt $E = +2\sigma/2\epsilon_0$ til venstre for planet og $-2\sigma/2\epsilon_0$ til høyre for planet. Dermed er det bare å legge sammen bidragene fra de tre planene. Det gir $E = 0$ for $z < 0$ og for $z > 2a$, $E = \sigma/\epsilon_0$ for $0 < z < a$ og $E = 2\sigma/\epsilon_0$ for $a < z < 2a$. Dermed graf C. (Andel riktige svar: 69 %)

22) Ranger det elektriske potensialet i de fire punktene merket med 1, 2, 3 og 4 i figuren til venstre i forrige oppgave.

A $V_1 > V_2 > V_3 > V_4$

Fra forrige oppgave har vi at V er konstant for $z < 0$, at V avtar lineært mellom $z = 0$ og $z = a$, at V avtar (raskere...!) lineært mellom $z = a$ og $z = 2a$, og at V er konstant for $z > 2a$. Dermed: $V_1 > V_2 > V_3 > V_4$. (Andel riktige svar: 45 %)

23) Ei skive med uniform ladning ρ_0 pr volumenhet har uendelig utstrekning i x - og z -retning og fyller rommet mellom $y = -d$ og $y = d$. Hvilken graf viser korrekt potensial $V(y)$?



Gauss' lov gir $E(y) = \rho_0 y/\epsilon_0$ inne i skiva, $E = -\rho_0 d/\epsilon_0$ til venstre for skiva, og $E = \rho_0 d/\epsilon_0$ til høyre for skiva. Her er $\mathbf{E} = E \hat{y}$. Dermed har vi at potensialet øker lineært for $y < -d$, avtar lineært for $y > d$, og er proporsjonalt med $-y^2$ for $|y| < d$. Dette passer fint med graf B. (Mens graf A passer med $E(y)$.) (Andel riktige svar: 28 %)

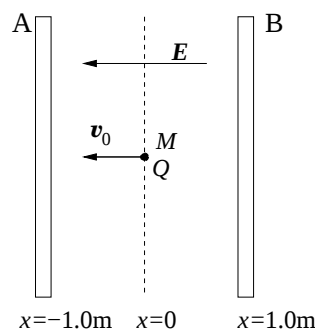
24) Ei tilnærmet uendelig stor dielektrisk skive plasseres på tvers i et uniformt ytre elektrisk felt $\mathbf{E}_0$. Skiva er produsert i et materiale med elektrisk susceptibilitet χ_e . Hva blir induisert ladning $\pm\sigma_i$ pr flateenhet på overflatene til den dielektriske skiva?



$$\begin{aligned}\sigma_i &= |\mathbf{P}| = \chi_e \epsilon_0 E = \chi_e \epsilon_0 \frac{D}{\epsilon_r \epsilon_0} = \chi_e \epsilon_0 \frac{E_0}{\epsilon_r} \\ &= \frac{\chi_e}{\chi_e + 1} \epsilon_0 E_0 = \frac{\epsilon_0 E_0}{1 + \chi_e^{-1}}\end{aligned}$$

(Andel riktige svar: 10 %)

25) To tilnærmet uendelig store parallelle metallplater A og B er plassert i henholdsvis $x = -1.0$ m og $x = 1.0$ m som vist i figuren nedenfor. Et uniformt elektrisk felt mellom platene på 20 kV/m (i negativ x -retning) er generert av ladning på metallplatene. Et oksygenion med masse $M = 16m_p$ og ladning $Q = -2e$ starter i $x = 0$ med hastighet $v_0 = 5.0 \cdot 10^4$ m/s i negativ x -retning. Hva blir dette ionets skjebne?



C Det treffer høyre plate med hastighet $6.9 \cdot 10^5$ m/s.

Kinetisk energi i starten:

$$T_0 = \frac{1}{2} M v_0^2 = 208.75 \text{ eV} \simeq 0.2 \text{ keV}$$

Forskjell i potensiell energi for ionet ved $x = -1$ m og ved $x = 0$:

$$U(-1) - U(0) = (-2e) \cdot (-20 \text{ kV}) = 40 \text{ keV}$$

Dette betyr at ionet snur lenge før det treffer venstre plate. Når det igjen passerer ved $x = 0$, vil det pga energibevarelse fortsatt ha kinetisk energi T_0 . Fra $x = 0$ til $x = 1$ m endres ionets potensielle energi med -40 keV. Pga energibevarelse har det derfor en kinetisk energi $T_1 = 40.2$ keV når det treffer høyre plate. Dette tilsvarer en hastighet

$$v_1 = \sqrt{2T_1/M} \simeq 6.9 \cdot 10^5 \text{ m/s}$$

(Andel riktige svar: 55 %)

FY1003/TFY4155 Elektrisitet og magnetisme/Elektromagnetisme

Midtsemesterprøve fredag 13. mars 2009 kl 1415 – 1615.

Fasit (Versjon A)

Oppgave	A	B	C	D	Oppgave	A	B	C	D
1	☐	☒	☐	☐	14	☐	☐	☐	☒
2	☐	☒	☐	☐	15	☐	☒	☐	☐
3	☐	☒	☐	☐	16	☐	☐	☐	☒
4	☐	☒	☐	☐	17	☒	☐	☐	☐
5	☐	☒	☐	☐	18	☒	☐	☐	☐
6	☒	☐	☐	☐	19	☐	☐	☐	☒
7	☐	☐	☐	☒	20	☐	☐	☐	☒
8	☐	☐	☒	☐	21	☐	☐	☒	☐
9	☐	☐	☒	☐	22	☒	☐	☐	☐
10	☒	☐	☐	☐	23	☐	☒	☐	☐
11	☐	☐	☐	☒	24	☐	☐	☒	☐
12	☐	☐	☒	☐	25	☐	☐	☒	☐
13	☒	☐	☐	☐					