

EXAMEN I 74310 KVANTEMEKANIKK 1 23.05.00

Løsningsforslag

Oppgave 1

a)

$$\langle F \rangle = \int \Psi^*(\vec{r}, t) \hat{F} \Psi(\vec{r}, t) d^3r,$$

integrert over hele rommet.

$$\text{Hermitisitet: } \int \Psi^* \hat{F} \Phi d^3r = \int \Phi (\hat{F} \Psi)^* d^3r.$$

Målbare verdier for en fysisk størrelse er egenverdiene for den tilhørende operator. Målbare verdier er reelle, og hermiteske operatorer har reelle egenverdier.

b)

$$[\hat{p}_x^2, x] = \hat{p}_x^2 x - x \hat{p}_x^2 = \hat{p}_x (\hat{p}_x x - x \hat{p}_x) + (\hat{p}_x x - x \hat{p}_x) \hat{p}_x = \hat{p}_x (-i\hbar) + (-i\hbar) \hat{p}_x = -2i\hbar \hat{p}_x.$$

Oppgave 2

Vi ønsker å skrive tilstanden $\Psi(x, 0)$ som en overlaging av egentilstander. Ved å bruke den oppgitte trigonometriske relasjon får vi

$$\Psi(x, 0) = \frac{10}{\sqrt{63L}} \sin \frac{\pi x}{L} - \frac{5}{\sqrt{63L}} \sin \frac{3\pi x}{L} + \frac{1}{\sqrt{65L}} \sin \frac{5\pi x}{x}.$$

Uttrykt ved de oppgitte egenfunksjonene:

$$\Psi(x, 0) = \frac{10}{\sqrt{126}} \psi_1(x) - \frac{5}{\sqrt{126}} \psi_3(x) + \frac{1}{\sqrt{126}} \psi_5(x).$$

Generelt er de mulige resultater ved energimåling en av Hamiltonoperatorens egenverdier E_n . Sannsynlighetene for de ulike resultatene er

$$p_n = |c_n|^2,$$

der c_n er koeffisientene når bølgefunksjonene utvikles i energieigenfunksjoner: $\Psi = \sum_n c_n \psi_n(x)$. I dette tilfelle er

$$p_1 = \frac{100}{126}, \quad p_3 = \frac{25}{126}, \quad p_5 = \frac{1}{126},$$

og alle andre sannsynligheter lik null. I dette tilfelle vil en få en av verdiene E_1, E_3, E_5 ved energimålingen.

Oppgave 3

a) Med $\hat{q} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a + a^\dagger)$ blir

$$\hat{q}^2|0\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}(a+a^\dagger)^2|0\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}(a^2+aa^\dagger+a^\dagger a+a^{\dagger 2})|0\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}(|0\rangle + \sqrt{2}|2\rangle).$$

Vi har brukt $a|0\rangle = 0$, $a^\dagger|0\rangle = |1\rangle$, $a|1\rangle = |0\rangle$ og $a^\dagger|1\rangle = \sqrt{2}|2\rangle$. Ved å ta skalarproduktet med $\langle 0|$ får vi da egentilstandene er ortonormerte:

$$\langle 0|\hat{q}^2|0\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}.$$

For fjerdepotensen kan vi gjøre det på samme vis. Alternativt bruker vi fullstendighetsrelasjonen $\sum_n |n\rangle\langle n| = 1$ til å skrive

$$\langle 0|\hat{q}^4|0\rangle = \sum_n \langle 0|\hat{q}^2|n\rangle\langle n|\hat{q}^2|0\rangle = \sum_n |\langle n|\hat{q}^2|0\rangle|^2.$$

Uttrykket vi fant for $\hat{q}^2|0\rangle$ viser at det er bare $n = 0$ og $n = 2$ som bidrar. Det gir

$$\langle 0|\hat{q}^4|0\rangle = \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^2 (1 + 2) = \frac{3\hbar^2}{4m^2\omega^2}.$$

b) For $c = 1$ får vi en symmetrisk oscillator, med $E_0(1) = \frac{1}{2}\hbar\omega$. For $c = \infty$ er potensialet uendelig til venstre for origo. Dette området er derfor utilgjengelig, og $\psi = 0$ her. Da bølgefunksjonen er kontinuerlig må bølgefunksjonen i det tilgjengelige området $x > 0$ også være null i origo. Forøvrig er Schrödingerlikningen for $x > 0$ den samme som for den symmetriske oscillatoren. Oscillator-eigenfunksjonene $\psi_n(q)$ for odde n er null i origo, og den med lavest energi er $\psi_1(q)$, som altså er grunntilstanden i "halvoscillator"-problemet. Energien er $E_0(\infty) = \frac{3}{2}\hbar\omega$.

Ved å innføre $\omega = \hat{\omega}/c$ blir potensialet

$$V(q) = \begin{cases} \frac{1}{2}m\hat{\omega}^2 q^2 & \text{for } q \leq 0 \\ \frac{1}{2}mc^{-2}\hat{\omega}^2 q^2 & \text{for } q \geq 0. \end{cases}$$

For $c \rightarrow 0$ vil potensialet på høyre side blir svært stort, så vi er i samme situasjon som for $c \rightarrow \infty$, med svaret

$$E_0 = \frac{3}{2}\hbar\hat{\omega} = \frac{3}{2}c\hbar\omega.$$

Så grunntilstandsenergien går mot null proporsjonalt med c .

c) Som læreboka.

d) Ved å sette $c = 1 + \lambda$, dvs $c^2 = 1 + 2\lambda + \mathcal{O}(\lambda^2)$, blir avviket fra det vanlige symmetriske oscillatorpotensialet:

$$\lambda\hat{H}_1 = \begin{cases} m\omega^2 q^2 \lambda + \mathcal{O}(\lambda^2) & \text{for } q \leq 0 \\ 0 & \text{for } q \geq 0. \end{cases}$$

Siden grunntilstanden $\langle q|0\rangle$ i det uperturberte problemet er symmetrisk i posisjonen q , blir middelveiden av perturbasjonen halvparten av

$$\langle 0|m\omega^2 q^2 \lambda|0\rangle.$$

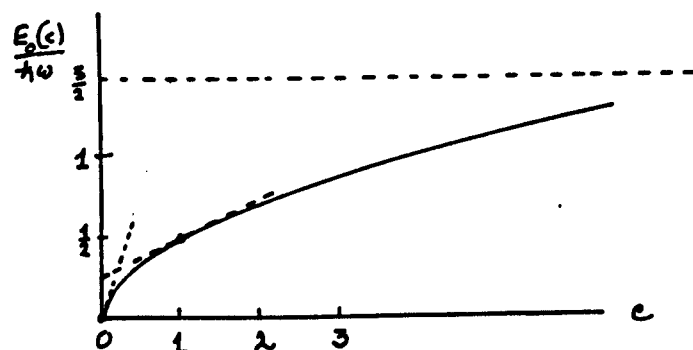
Dette regnet vi ut i oppgave 3a). Vi får

$$E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega + \frac{1}{2}\lambda\frac{1}{2}\hbar\omega.$$

Førsteordensbidraget blir da

$$\frac{E_0(c)}{\hbar\omega} = \underline{\underline{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}(c-1)}}.$$

Skisse:



Oppgave 4

a) Som læreboka.

b) Vi skulle finne et estimat for grunntilstandsenergien E_0 i det triangulære potensialet

$$V(z) = \begin{cases} \infty & \text{for } z < 0 \\ Fz & \text{for } z \geq 0 \end{cases}$$

ved variasjonsmetoden vha prøvefunksjonen

$$f(z) = \begin{cases} 0 & \text{for } z < 0 \\ ze^{-\frac{1}{2}\alpha z^2} & \text{for } z \geq 0 \end{cases}$$

Vi må beregne middelveiden av Hamiltonoperatoren (for $z \geq 0$)

$$\widehat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dz^2} + Fz$$

vha prøvefunksjonen $f(z)$:

$$E[f] = \frac{\int_0^\infty f^* \widehat{H} f \, dz}{\int_0^\infty |f|^2 \, dz}.$$

Vi trenger tre integraler:

- 1) $\int_0^\infty |f|^2 dz = \int_0^\infty z^2 e^{-\alpha z^2} dz = \alpha^{-\frac{3}{2}} \sqrt{\pi}/4.$
- 2) $-(\hbar^2/2m) \int_0^\infty f f'' dz = -(\hbar^2/2m) \int_0^\infty z(-3\alpha z + \alpha^2 z^3) e^{-\alpha z^2} dz = (\hbar^2/2m) \frac{3}{8} \sqrt{\pi/\alpha}.$
- 3) $F \int_0^\infty z |f|^2 dz = F \int_0^\infty z^3 e^{-\alpha z^2} dz = \frac{1}{2} F \alpha^{-2}.$

Det gir

$$E[f] = \frac{(\hbar^2/2m) \frac{3}{8} \sqrt{\pi/\alpha} + (2/\sqrt{\pi}) F \alpha^{-2}}{\alpha^{-\frac{3}{2}} \sqrt{\pi}/4} = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{3}{2} \alpha + \frac{2F}{\sqrt{\pi\alpha}}.$$

Jo mindre verdi, jo bedre estimat. For å finne minimum deriverer vi mhp α . Det gir

$$\frac{\hbar^3}{2m} \frac{3}{2} - F \pi^{-\frac{1}{2}} \alpha^{-\frac{3}{2}} = 0, \quad \text{eller} \quad \alpha = \left(\frac{2}{3\sqrt{\pi}} F \frac{2m}{\hbar^2} \right)^{\frac{2}{3}}.$$

Når vi setter denne verdien tilbake i uttrykket for $E[f]$ finner vi minimalverdien

$$\underline{\underline{E_0 = 3 \left(\frac{3}{2\pi} \right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{\hbar^2}{2m} \right)^{\frac{1}{3}} F^{\frac{2}{3}} \simeq 2.3448 \left(\frac{\hbar^2}{2m} \right)^{\frac{1}{3}} F^{\frac{2}{3}}.}}$$