

Antydning løsning. Oppgave 1.

a) Eratosthenes' metode kunne ikke virke, fordi de to stolpene ville bli parallelle på en flat jordoverflate, og da kunne man ikke få f.eks. skygge et sted og ikke skygge et annet sted. Sola måtte f.eks. stå i sørst begge steder (eller like lang skygge begge steder).

b) Ved polar-sirklene ($\pm 66.5^\circ$ fra ekvator) kan man se sammenfallende horisontplan og ekliptikeplan.

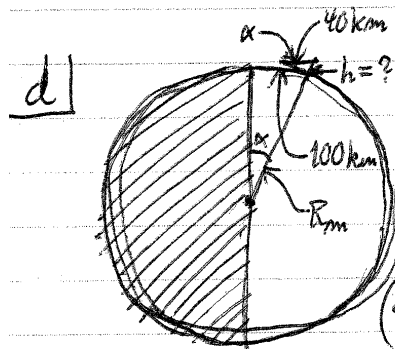
c) Forholdet mellom jordas og månens overflate blir
 $(R_j/R_m)^2 = (6375/1738)^2 = 13.45$ (eller $4^2 = 16$)

Hvis månen fikk 30000 krater i løpet av $5 \cdot 10^9$ år, skulle jorda ha fått dannet 3 krater i løpet av

$$X = 3 \cdot 5 \cdot 10^9 / (13.45 \cdot 30000) \text{ år} = 3.7 \cdot 10^4 \text{ år} \quad (3.1 \cdot 10^4 \text{ år})$$

siden antall krater dannet pr. flateenhet og tidsenhet blir

$$3 / (X \cdot 4\pi \cdot 6375^2) = 30000 / (5 \cdot 10^9 \cdot 4\pi \cdot 1738^2).$$



Fjellets høyde er gitt ved (se fig.)

$$h/40 \approx 100/R_m = 100/1738,$$

$$\text{dvs. } h = 40 \cdot 100 / 1738 \text{ km} = 2.3 \text{ km}$$

(Siden α er liten, er $\alpha \approx \sin \alpha \approx \tan \alpha$)
($\alpha \approx 100/1738 \text{ rad} = 100 \cdot 57.3 / 1738^\circ \approx 3.3^\circ$)

(2)

- e) Eksentrisiteten er gitt ved halvaksene i ellipsebanen, eller med maks. og min. for r som er
- $$r_{\max} = c/(1-\epsilon), \quad r_{\min} = c/(1+\epsilon),$$

dvs.
$$\epsilon = (r_{\max} - r_{\min}) / (r_{\max} + r_{\min})$$

$$= (248 - 206) / (248 + 206) = \underline{0.093}$$

Dette passer med Mars, også siden den store halvakse blir

$$a = (r_{\max} + r_{\min}) / 2 = 2.27 \cdot 10^8 \text{ km} = 2.27 / 1.496 \text{ AU} = \underline{1.52 \text{ AU}}$$

i planetbanen.

- f) For en slik kometbane er $c \approx a$, når eksentrisiteten er veldig stor, dvs. aphel-avstanden er
- $$r_{\max} \approx 2a, \quad \text{siden } r_{\min} = R_0 \ll r_{\max}.$$

Dessuten er perioden gitt ved Keplers 3. lov, dvs.

$$T^2 [\text{år}] = a^3 [\text{AU}] / M [M_\odot], \quad \text{der } M = M_\odot = 1 [M_\odot],$$

dvs. for

$$a = 200/2 \text{ AU} = 100 \text{ AU}: T = \sqrt{a^3} = \sqrt{10^6 \text{ år}^3} = \underline{10^3 \text{ år}}$$

$$a = 200000/2 \text{ AU} = 10^5 \text{ AU}: T = \sqrt{a^3} = \sqrt{10^{15} \text{ år}^3} = \underline{3.2 \cdot 10^7 \text{ år}}$$

- g) Romfartøyet må sendes opp i motsatt retning av jordas banebevegelse rundt sola, og med en slik hastighet at det (i stor avstand fra jorda) får en hastighet relativt til jorda som er lik (dvs. må også korrigere for oppskytningsstedets hastighet p.g.a. jordrotasjon),

men motsatt rettet jordas banehastighet rundt sola. Da vil romskipet få tilnærmet kun radial hastighet og null tangential hastighet i forhold til sola, og vil falle rett inn mot sola.

Oppgave 2

a) Med flest hydrogen-atomer i grunn-tilstanden burde Lyman-serien være sterkst i sol-spektrret, men den ligger i det ultrafiolette området som ikke er synlig fra jord-overflaten. I den synlige delen av spektrret får vi Balmer-serien

b) Protuberansen vil stige til

$$150 \cdot 3 \cdot 60 \cdot 60 \text{ km} = \underline{\underline{1.62 \cdot 10^6 \text{ km} = H}}$$

Energi-bevarelse gir oss unnslippingshastigheten, dvs

$$E = T + U = \frac{1}{2} m v_0^2 - G M m / R = - G M m / (R + h),$$

$$v_0 = \sqrt{2 G M [R^{-1} - (R + h)^{-1}]} = \sqrt{2 G M h / R (R + h)}$$

($\approx \sqrt{2 G M h / R^2} \approx \sqrt{2 g h}$ for $h \ll R$;

Unnslippingshastigheten blir da (for $h \rightarrow \infty$) regnet fra overflaten

$$v_0 = \sqrt{2 G M / R} = \sqrt{2 \cdot 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 2 \cdot 10^{30} / 7 \cdot 10^8} \text{ m/sek} = \underline{\underline{617 \text{ km/s}}}$$

men egentlig skal vi regne fra $(R + H)$ til $h \rightarrow \infty$, dvs

$$v_0 = \sqrt{2 G M / (R + H)} = \sqrt{2 \cdot 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 2 \cdot 10^{30} / 2.32 \cdot 10^9} \text{ m/sek} = \underline{\underline{339 \text{ km/s}}}$$

dvs. $v < v_0$ og materien (protuberansen) kan ikke unnslippe

c) Tilstandsligningen blir, med konstant tetthet:

(4)

$$dP = -\rho g = -(6\pi\rho/r^2)dr = -(4\pi r^3\rho G\rho/3r^2)dr \\ = -(4\pi G\rho^2/3)rdr,$$

dvs. $dP/dr = -(4\pi G\rho^2/3)r,$
 $P = -(2\pi G\rho^2/3)r^2 + \text{konst.}$

Med grensebetingelsene $P=0$ for $r=R$, gir det
 $P = (2\pi\rho^2 G/3)(R^2 - r^2) = (2\pi\rho^2 G/3)R^2[1 - (r/R)^2]$
 $= (\rho GM/2R)[1 - (r/R)^2],$ når $M = 4\pi R^3\rho/3,$

dvs. $P_{\max}(r=0) = \rho GM/2R = \frac{1400 \cdot 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 2 \cdot 10^{30}}{2 \cdot 7 \cdot 10^8} \text{ N/m}^2$
 $= \underline{1.33 \cdot 10^{14} \text{ N/m}^2} = \underline{1.33 \cdot 10^9 \text{ atm.}}$

Tilstandsligningen kan utledes slik: Vi betrakter et volum-element i avstand r fra sentrum, med flate dA normalt r . En likevektsbetraktning gir da med Newtons 2. lov i r -retning:

$$(P + dP)dA - PdA = F = Gm(r)dm/r^2,$$

$$dP \cdot dA = -Gm(r)\rho(r) dA \cdot dr/r^2,$$

$$\underline{dP/dr = -\rho Gm(r)/r^2}, \text{ der } m(r) = \int_0^r 4\pi\rho r^2 dr,$$

som også gjelder for et helt kuleskall, dvs. $dA \rightarrow 4\pi r^2$.

d) Tyngdeakselerasjonen er generelt gitt ved
 $g = MG/r^2,$

der r er avstanden fra stjernens sentrum, dvs.

$$g_s = M_\odot G/R_\odot^2 = \frac{2 \cdot 10^{30} \cdot 6.675 \cdot 10^{-11}}{5.98 \cdot 10^{24} \cdot 7^2 \cdot 10^{10}} g_j = \underline{27.7 g_j}$$

for sola, og for stjernene:

5

$$q_1 = M_{\odot} / (0.01 R_{\odot})^2 = \frac{2 \cdot 10^{30} \cdot 10^4 \cdot 6.375^2 \cdot 10^6}{5.98 \cdot 10^{24} \cdot 7^2 \cdot 10^{10}} \quad q_j = \underline{2.8 \cdot 10^{-5} q_j}$$

$$q_2 = M_{\odot} / (1000 R_{\odot})^2 = \frac{2 \cdot 10^{30} \cdot 6.375^2 \cdot 10^6}{5.98 \cdot 10^{24} \cdot 10^6 \cdot 7^2 \cdot 10^{10}} \quad q_j = \underline{2.8 \cdot 10^{-5} q_j}$$

$$q_1 / q_2 = 10^5 / 10^{-5} = \underline{10^{10}}$$

e) Absolutt størrelsesklasser blir

$$M = m + 5 - 5 \lg d = 0 + 5 - 5 \cdot 2 = \underline{-5}$$

$$M = m + 5 - 5 \lg d = 17.5 + 5 - 5 \cdot 1.3 = \underline{+16}$$

f) Med trigonometrisk parallaks lik 0.01 buesek = α ,
blir avstanden til stjerna lik

$$d = 1/\alpha = 100 \text{ parsec,}$$

dvs. absolutt størrelsesklasse er

$$M = m + 5 - 5 \lg d = 15 + 5 - 10 = \underline{10}$$

Wiens forskyvningslov gir en fotosfæretemperatur lik

$$T = c/\lambda_{\max} = 6000 \cdot 5000/10000 \text{ K} = 3000 \text{ K, } T_{\odot}/T = 2,$$

og når luminositeten er gitt ved

$$M - M_{\odot} = 2.5 \lg (L_{\odot}/L),$$

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4 = L_{\odot}/100 = 4\pi R_{\odot}^2 \sigma T_{\odot}^4/100,$$

$$\text{får vi } R = (T_{\odot}/T)^2 R_{\odot} / \sqrt{100} = \underline{0.4 R_{\odot}} = \underline{2.8 \cdot 10^5 \text{ km.}}$$

g) Materien i stjerntåken må være interstellart støv,
dvs. stjerntåker er en "refleksjonståke". (Gass i vanlig forstand ville produsere emisjonslinjer, men her får vi bare absorpsjon eller refleksjon. Dessuten er O-stjernen så varm, at de fleste atomer er ionisert i fotosfæren)

(6)

Oppgave 3

a) Med jordas banehastighet like v_j , blir stjernens radialhastighet i forhold til sola gitt ved

$$\left. \begin{array}{l} v_s - v_j = -48 \text{ km/sek} \\ v_s + v_j = +12 \text{ km/sek} \end{array} \right\} \underline{v_s = -18 \text{ km/sek (møt sola)}},$$

dvs. jordas banehastighet er like

$$v_j = 12 + 18 \text{ km/sek} = \underline{30 \text{ km/sek}}$$

På et år tilbakelegger jorda da

$$\begin{aligned} \text{dvs. } T \cdot v_j &= 2\pi a \\ \text{dvs. } a &= T \cdot v_j / 2\pi = \frac{365,25 \cdot 24 \cdot 3600 \cdot 30}{2\pi} \text{ km} = \underline{1,5 \cdot 10^8 \text{ km} = 1 \text{ AU}} \end{aligned}$$

b) Tyngdepunktets posisjon finnes ved "moment-satsen":

$$\begin{aligned} M_1 R_1 &= M_2 R_2, & 3M_\odot R_1 &= 1M_\odot (4 - R_1), \\ 4M_\odot R_1 &= 4M_\odot, & \underline{R_1} &= \underline{1 \text{ AU}}. \end{aligned}$$

Keplers 3. lov gir oss perioden T , dvs. med dimensjoner [AU], [år] og [$M_\odot$], får vi

$$(M_1 + M_2) T^2 = a^3,$$

$$T^2 = a^3 / (M_1 + M_2) = 4^3 / 4 = 16,$$

$$\underline{T = 4 \text{ år}}$$

c) Observerte radial-hastighet v_r er radial-komponenten til romhastigheten som blir

$$v = v_r / \sin \beta, \quad (v_r = v \sin \beta)$$

når β er vinkelen mellom baneplanet og planet normalt vår synsretning. Relativ-avstanden mellom stjernene er da gitt ved (i relativ-koordinater)

$$a = vT/2\pi = \frac{v_r \cdot T}{2\pi \sin\beta} = \frac{60 \cdot 22 \cdot 24 \cdot 3600}{2\pi \cdot 0.5} \text{ km} \\ = 36\,252\,000 \text{ km} = \frac{36\,252\,000}{149\,600\,000} \text{ AU} = \underline{0.2423 \text{ AU}},$$

perioden er

$$T = 22 \text{ døgn} = 22/365.25 \text{ år} = \underline{0.0602 \text{ år}},$$

og total masse blir

$$M = M_1 + M_2 = a^3/T^2 = (0.2423^3/0.0602^2) M_\odot = \underline{3.9 M_\odot}$$

d) Ifølge Keplers 3. lov gjelder $MP^2 = a^3$, når M er Melkeveiens masse i $[M_\odot]$, P er perioden i $[\text{år}]$, og a er solas baneradius i $[\text{AU}]$, dvs.

$$a = 2.063 \cdot 10^5 \cdot 10^4 \text{ AU} = 2.063 \cdot 10^9 \text{ AU}, \quad P = 10^8 \text{ år},$$

$$M = (2.063 \cdot 10^9)^3 / (10^8)^2 M_\odot = \underline{8.8 \cdot 10^{11} M_\odot}$$

e) 51 stjerner innenfor en radius lik 5 parsec gir en stjerntetthet lik

$$51.3 / (4\pi \cdot 5^3) \text{ parsec}^{-3} = 0.097 \text{ stjerner/parsec}^3,$$

som tilsvarende en midlere masse-tetthet lik

$$\rho = \frac{0.097 \cdot 0.4 \cdot 2 \cdot 10^{33}}{(2.06265 \cdot 10^5 \cdot 1.496 \cdot 10^{13})^3} \text{ g/cm}^3 = \underline{2.64 \cdot 10^{-24} \text{ g/cm}^3}$$

f) Tettheten i kulehopen blir;

P.S. Tilleggs kommentarer til eksamen SIF4030. 8/5-2000

1c) Både

$$(R_j/R_m)^2 = (6375/1738)^2 = 13.45$$

og

$$(R_j/R_m)^2 = 4^2 = 16 \text{ (oppgitt)}$$

godtas som riktig svar, dvs.

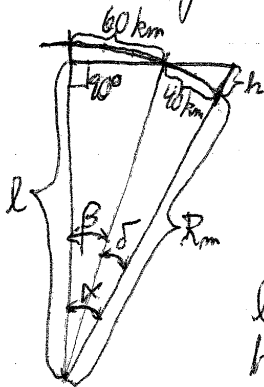
$$\underline{X = 3.7 \cdot 10^4 \text{ år}} \quad \text{eller} \quad \underline{X = 3.1 \cdot 10^4 \text{ år}}$$

1d) En approksimativ løsning (for små vinkler) blir

$$h/40 \approx 100/R_m = 100/1738,$$

$$h \approx 40 \cdot 100/1738 \text{ km} \approx \underline{2.3 \text{ km}},$$

Som er OK som riktig svar. Hvis man vil regne mer nøyaktig, blir løsningen følgende (se fig.):



$$100/2\pi R_m = \alpha^\circ/360^\circ, \text{ dvs.}$$

$$\alpha = 100 \cdot 360 / (2\pi \cdot 1738) = \underline{3.30^\circ},$$

$$\beta = (60/100)\alpha = (3/5) \cdot 3.3^\circ = \underline{1.98^\circ},$$

og

$$l = (R_m + h) \cos \alpha = R_m \cos \beta, \text{ dvs.}$$

$$h = R_m (\cos \beta - \cos \alpha) / \cos \alpha =$$

$$= 1738 (0.9994 - 0.9983) / 0.9983 \text{ km} \approx \underline{1.9 \text{ km}}$$

1g) Uansett hvordan romskipet skytes opp, er en "kompensasjon" for jordas banehastighet klart det viktigste. Andre ting spiller mindre rolle, men romskipet må selvfølgelig kunne forlate jordas grav.felt.

- 2a) Spørsmålet her kan kanskje være "tvetydig" eller "uklart" (ufullstendig) formulert. Balmer-serien er sterkest i det synlige spektrum (fra jordoverflaten), mens Lyman-serien som egentlig er sterkest, er usynlig fra jordoverflaten. Både Lyman-serien og Balmer-serien godtas derfor som svar (hvis det ikke er andre feil i svaret).
- 2b) Siden spørsmålet inneholder en "sammenblanding" av konstant hastighet og unnslippingshastighet (som forutsetter minskende kinetisk energi og hastighet ved "klatrung" i gravitasjonsfeltet) godtas både fotosfæren og protuberansens posisjon etter 3 timer som utgangspunkt for beregning av unnslippingshastigheten, selv om bare det siste egentlig er det riktige. Men begge deler gir samme konklusjon, og ^{tall-}verdien for unnslippingshastigheten blir ikke "etterlyst" i spørsmålet...
- 2g) Det viktigste svaret her er at materien i stjernehaker kan ikke være (en gass av) frie atomer eller molekyler, men må bestå av større partikler (stør).
- 3b) Oppgaven kan løses på to måter; enten direkte med relativ avstand og Keplers 3. lov eller ved å se på bare en stjernes bevegelse om felles tyngdepunkt. Det gir samme svar.
- 3c) Her mangler data for hver enkelt-stjerne, så man må egentlig bruke relativ-koordinater og Keplers 3. lov. En an'je for bare en stjerne som i 3b) kan brukes hvis man f.eks. antar to stjerner med samme masse (og ~~tilsv.~~ resultat for total masse).