

UNIVERSITETET I TRONDHEIM
NORGES TEKNISKE HØGSKOLE
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Kåre Olaussen
Telefon: 3652

Eksamen i fag 74943 Matematiske approksimasjonsmetoder i fysikken

Lørdag 19. desember 1992

Tid: 09.00–15.00

Tillatte hjelpemidler: (Alternativ B): Godkjent lommekalkulator.
Rottmann, *Mathematische Formelsammlung*.
Barnett and Cronin, *Mathematical Formulae*.

Oppgave 1:

- a) Hva menes med (i) et ordinært punkt, (ii) et regulært singulært punkt, og (iii) et irregulært singulært punkt for en differensialligning? Hva menes med *rangen* til en singularitet?
- b) Gi eksempel på en annen ordens differensialligning med (i) nøyaktig ett regulært singulært punkt på tallkula, og (ii) nøyaktig to regulære singulære punkter på tallkula.
- c) Klassifiser differensialligningen

$$y''(x) + a y'(x) - e^x y(x) = 0 \tag{1}$$

med hensyn på singulariteter, og deres art og rang. Her er a en konstant.

- d) Finn de mulige asymptotiske oppførsler for ligningen (1) når (i) $x \rightarrow +\infty$ og (ii) $x \rightarrow -\infty$ (for reelle x).
- e) Transformer ligningen (1) til “enklest mulig form”, dvs. slik at summen av rangen til alle de singulære punktene blir så liten som mulig.

Oppgave 2:

Se på integralet

$$I(z, a) = \int_0^\infty dt e^{-zt} \left(\frac{t}{1+t} \right)^a, \quad (2)$$

der z og a antas å være reelle og positive.

a) Bestem ledende ordens oppførsel for (2) når $z \rightarrow +\infty$ med fast a .

b) Bestem ledende ordens oppførsel for (2) når $a \rightarrow +\infty$ med fast z .

c) Bestem ledende ordens oppførsel for (2) når $z \rightarrow 0^+$ med fast a .

Finn også den neste korreksjonen til denne oppførselen.

d) Hva menes det med at en funksjon f har en asymptotisk potensrekke,

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n, \quad (3)$$

om $x = 0$?

Forklar hva som menes med optimal trunkeringsregel.

e) Finn den fullstendige asymptotiske utviklingen for $I(z, 2)$ når $z \rightarrow \infty$.

For en gitt (stor) z , hvor mange ledd lønner det seg å ta med i denne rekken?

Oppgave 3:

a) Forklar kort hva grensesjikt-metoden går ut på. Forklar hva som menes med ytre og indre variable, og ytre og indre løsninger.

b) Se på randverdi problemet definert ved differensialligningen

$$\varepsilon y''(x) - x^3 y'(x) - y(x) = 0, \quad (4)$$

og grensebetingelsene

$$y(1) = y(-1) = 1, \quad (5)$$

når $\varepsilon \rightarrow 0^+$.

Bestem hvor det må være grensesjikt, og hvordan den tilhørende tykkelsen skalerer med ε .

c) Finn (i) indre, (ii) ytre, og (iii) uniform løsning på randverdiproblemet i forrige punkt.

d) Vi forandrer nå ligning (4) til

$$\varepsilon y''(x) + x^3 y'(x) - y(x) = 0, \quad (6)$$

med de samme grensebetingelsene som før.

Bestem igjen hvor det må være grensesjikt, og hvordan den tilhørende tykkelsen skalerer med ε .

e) Finn (i) indre, (ii) ytre, og (iii) uniform løsning på randverdiproblemet i forrige punkt.

Oppgave 4:

a) Forklar kort hva WKB-tilnærmingen går ut på. Gi eksempler på noen problemstillinger der den kan anvendes. (Du trenger ikke å løse disse problemene.)

b) Se så på startverdiproblemet

$$\frac{d^2}{dt^2}f(t) + 2\frac{d}{dt}f(t) = e^{\varepsilon t} f(t), \quad (7)$$

$$f(0) = 1, \quad \frac{df}{dt}(0) = 0. \quad (8)$$

når $\varepsilon \rightarrow 0^+$.

Vis at du ved en passende skaling av de uavhengige variable kan transformere (7) over på “WKB-form”, og gjør dette.

c) Se først bort fra startbetingelsene for f . Bruk WKB-metoden til å finne to uavhengige (tilnærmede) løsninger til (7). Regn, som vanlig, til ledende orden i ε .

NB! Det er ikke nødvendig, og heller ikke hensiktsmessig, å eksplisitt utføre de integralene som inngår i løsningen.

d) Finn så startverdiene (dvs. verdien av funksjonen og dens første deriverte i $t = 0$) for de løsningene som du fant i forrige punkt, igjen til ledende orden i ε .

e) Bruk resultatet fra foregående punkt til å finne ledende ordens løsning til startverdiproblemet (7-8).

Finn oppførselen til denne løsningen når $t \rightarrow \infty$.