NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE
UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Kåre Olaussen
Telefon: 93652

Eksamen i fag 74943 Matematiske approksimasjonsmetoder i fysikken
Fredag 20. desember 1996
Tid: 09.00–15.00

Tillatte hjelpemidler: B2 — Typegodkjent kalkulator, med tomt minne, i henhold til liste utarbeidet av NTH.
Rottmann, *Mathematische Formelsammlung.*
Barnett and Cronin, *Mathematical Formulae.*

Oppgave 1:

I denne oppgaven skal du se på Schrödinger-ligningen for en partikkel i et én-dimensjonalt periodisk potensial,

$$V(x) = -V_0 \sin^2(x).$$

Etter passende skaleringer, og med variabelskiftet $t = \cos(x)$, kan denne ligningen skrives

$$\left[(1-t^2)\frac{d^2}{dt^2} - t\frac{d}{dt} + (a - b\,t^2)\right] f(t) = 0, \tag{1}$$

der a og b er konstanter

a) Klassifisér ligning (1) etter singularitetenes antall og natur.

b) Bestem de mulige ledende asymptotiske oppførsler til løsningene $f(t)$ når $t \to 1$.

c) Bestem de mulige ledende asymptotiske oppførsler til løsningene $f(t)$ når $t \to \infty$.

Oppgave 2:

a) Forklar hva som menes med "metoden med dominerende balanse".

b) Se på differanseligningen

$$\mathcal{Z}_{n+1} + n\mathcal{Z}_n - \mathcal{Z}_{n-1} = 0. \tag{2}$$

Bestem de mulige asymptotiske oppførsler for $\mathcal{Z}_n$ når $n \to \infty$.

Oppgave 3:

Gitt funksjonen

$$\mathcal{F}_\nu(z) \equiv \int_0^\infty dt\, \mathrm{e}^{-z\cosh t}\,(\sinh t)^{2\nu}. \tag{3}$$

For hver av grensene nedenfor, angi hvilket t-område som gir hovedbidraget til integralet, og hvilke forenklinger som kan gjøres med integranden i dette området.

a) Bestem den ledende oppførsel til $\mathcal{F}_\nu(z)$ når $z \to 0^+$ med $\nu > 0$ fast.

b) Bestem den ledende oppførsel til $\mathcal{F}_\nu(z)$ når $z \to \infty$ med $\nu > -\frac{1}{2}$ fast.

c) Bestem den ledende oppførsel til $\mathcal{F}_\nu(z)$ når $\nu \to \infty$ med $z > 0$ fast.

d) Bestem den ledende oppførsel til $\mathcal{F}_\nu(\nu\zeta)$ når $\nu \to \infty$ med $\zeta > 0$ fast.

Oppgave 4:

I denne oppgaven skal du bruke WKB-metoden til å analysere Schrödinger-ligningen

$$\left(\varepsilon^2 \frac{d^2}{dx^2} + \sin^2 x\right)\psi(x) = 0, \quad \text{for } -\infty < x < \infty, \tag{4}$$

når $\varepsilon \to 0^+$.

a) Skriv ned de mulige ledende ordens WKB-løsninger til ligning (4).

b) Bestem områdene der WKB-løsningen bryter sammen. Hvordan varierer tykkelsen på disse områdene med ε når $\varepsilon \to 0^+$?

c) Forklar hvilke forenklinger du kan gjøre med ligning (4) i områdene der WKB-løsningen bryter sammen, og skriv ned en skalert (dvs. slik at ε ikke lenger opptrer) versjon av den forenklede ligningen i disse områdene. Kall din skalerte variabel for X.

d) Forklar hvordan du kan bruke løsningen av den forenklede ligningen til å finne en WKB-løsning til (4) som er globalt gyldig (dvs. slik at de ubestemte parameterne i hvert WKB gyldighetsområde er relatert til hverandre).

e) Finn (f.eks. på integralform) to uavhengige løsninger til din forenklede ligning, og bestem den asymptotiske oppførselen til disse løsningene når $X \to \pm\infty$.

Oppgave 5:

I denne oppgaven skal du bruke flerskalautvikling til analysere startverdiproblemet

$$\ddot{y}(t) + y(t) = \varepsilon \cos 2t \, y(t), \tag{5}$$

når $\varepsilon \to 0^+$. Startverdiene velges til

$$y(0) = 1, \qquad \dot{y}(0) = 0. \tag{6}$$

a) Innfør tidsskalaer t og $\tau = \varepsilon t$, og skriv ned den formelle partielle differensialligningen for $y(t, \tau)$.

b) Vis at to uavhengige nullte ordens løsninger til denne ligningen kan skrives på formen $A_\pm(\tau)\, \mathrm{e}^{\pm it}$.

c) Bestem ligningene som det er naturlig å pålegge $A_\pm(\tau)$, og løs disse.

d) Skriv ned den fullstendige nullte ordens flerskalaløsningen til (5,6).

Oppgitt:

$$\cos 2t \, \mathrm{e}^{\pm it} = \frac{1}{2} \left(\mathrm{e}^{\pm 3it} + \mathrm{e}^{\mp it} \right) \tag{7}$$