NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE
UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Kåre Olaussen
Telefon: 93652

Eksamen i fag 74943 Matematiske approksimasjonsmetoder i fysikken
Tirsdag 12. januar 1998
Tid: 09.00–15.00

Tillatte hjelpemidler: Alternativ B — Godkjent lommekalkulator tillatt.
Rottmann, *Mathematische Formelsammlung.*
Barnett and Cronin, *Mathematical Formulae.*
Lennart Råde and Bertil Westergren, *Mathematics Handbook for Science and Engineering.*
Dwight Herbert Bristol, *Tables of Integrals and other mathematical data* (russisk utgave også tillatt).

Note: There also exists an english version of this problem set.

Oppgave 1:

Se på differensialligningen

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d}{x dx} + \frac{1}{x^4}\right] y(x) = 0. \tag{1}$$

a) Finn og klasssifiser de singulære punktene til denne ligningen.

b) Bestem de mulige ledende asymptotiske oppførsler for $y(x)$ når

1. $x \to 0$.
2. $x \to 1$.
3. $x \to \infty$.

Oppgave 2:

Gitt (partisjons-) funksjonen

$$\mathcal{Z}_\nu(\beta) \equiv \int_0^\infty k^\nu \, dk \, \mathrm{e}^{-\beta\sqrt{k^2+1}} \tag{2}$$

For hver av grensene nedenfor, angi hvilket k-område som gir hovedbidraget til integralet, og hvilke forenklinger som kan gjøres med integranden i dette området.

a) Bestem den ledende oppførsel til $\mathcal{Z}_\nu(\beta)$ når $\beta \to 0^+$ med $\nu > 0$ fast.

b) Bestem den ledende oppførsel til $\mathcal{Z}_\nu(\beta)$ når $\beta \to \infty$ med $\nu > -1$ fast.

c) Bestem den ledende oppførsel til $\mathcal{Z}_\nu(\beta)$ når $\nu \to \infty$ med $\beta > 0$ fast.

d) Bestem den ledende oppførsel til $\mathcal{Z}_\nu(\nu\zeta)$ når $\nu \to \infty$ med $\zeta > 0$ fast.

Oppgave 3:
Se på summen

$$Z(\beta; a) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\beta\sqrt{n^2+a^2}}. \tag{3}$$

a) Finn ledende oppførsel til $Z(\beta; a)$ når $\beta \to \infty$ med $a > 0$ fast.

b) Finn ledende oppførsel til $Z(\beta; a)$ når $a \to \infty$ med $\beta > 0$ fast.

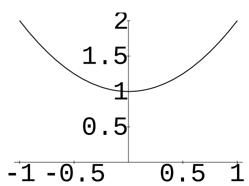
c) Bestem sålangt du kan de ikke-forsvinnende leddene i utviklingen av $Z(\beta; a)$ når $\beta \to 0^+$ med $a > 0$ fast.

Oppgave 4:
Se på randverdiproblemet

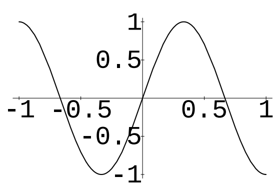
$$\varepsilon y''(x) + a(x)y'(x) + y(x) = 0, \quad y(-1) = y(1) = 1 \tag{4}$$

i grensen $\varepsilon \to 0^+$. Ved hvilke posisjoner får vi grensesjikt, og hvordan skalerer tykkelsen av disse med ε, når

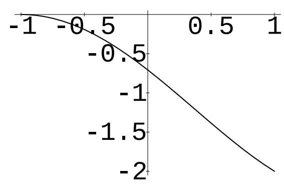
a) $a(x) = 1 + x^2$, som på figuren under



b) $a(x) = \sin(\frac{3\pi}{2}x)$, som på figuren under



c) $a(x) = -(1 + x)\sin[\frac{\pi}{4}(1 + x)]$, som på figuren under



d) Analyser tilslutt randverdiproblemet (4) mer detalj, med $a(x) = 1 + x^2$. Finn til laveste ikke-trivielle orden i ε, (i) den ytre, (ii) den indre, og (iii) den uniforme løsningen på problemet.

Oppgave 5:

I denne oppgaven skal du bruke flerskalautvikling til å analysere startverdiproblemet

$$\ddot{y}(t) + y(t) = \varepsilon \sin 2t\, y(t), \tag{5}$$

når $\varepsilon \to 0^+$. Startverdiene velges til

$$y(0) = 0, \qquad \dot{y}(0) = 1. \tag{6}$$

a) Innfør tidsskalaer t og $\tau = \varepsilon t$, og skriv ned den formelle partielle differensialligningen for $y(t, \tau)$.

b) Vis at to uavhengige nullte ordens løsninger til denne ligningen kan skrives på formen $A_\pm(\tau)\, \mathrm{e}^{\pm it}$.

c) Bestem ligningene som det er naturlig å pålegge $A_\pm(\tau)$, og løs disse.

d) Skriv ned den fullstendige nullte ordens flerskalaløsningen til (5,6).

Oppgitt:

$$\sin 2t\, \mathrm{e}^{it} = \frac{1}{2i}\left(\mathrm{e}^{3it} - \mathrm{e}^{-it}\right), \qquad \sin 2t\, \mathrm{e}^{-it} = \frac{1}{2i}\left(\mathrm{e}^{it} - \mathrm{e}^{-3it}\right). \tag{7}$$