Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
NTNU

Institutt for fysikk

Faglig kontakt under eksamen:
Kåre Olaussen
Telefon: 93652

Eksamen i DIF4943 Matematiske approksimasjonsmetoder i fysikken
Mandag 11. desember 2000
09:00–15:00

Tillatte hjelpemidler: Alternativ B

Godkjent lommekalkulator.
K. Rottman: *Matematisk formelsamling* (alle språkutgaver)
Barnett and Cronin: *Mathematical formulae* (alle språkutgaver)
Råde and Westergren: *Mathematics Handbook for Science and Engineering* (alle språkutgaver)

Dette oppgavesettet er på 3 sider.

Oppgave 1

a) Se på integralet

$$y_1(x) = \int_x^\infty d\xi \, \mathrm{e}^{-\xi^2}, \tag{1}$$

og finn den ledende oppførselen til $y_1(x)$ når $x \to \infty$.

b) Se på integralet

$$y_2(x) = \int_0^x d\xi \, \mathrm{e}^{\xi^2}, \tag{2}$$

og finn den ledende oppførselen til $y_2(x)$ når $x \to \infty$.

c) Se på differensialligningen

$$y''(x) + axy'(x) + y(x) = 0, \tag{3}$$

der $a \neq 0$ er en reell konstant (som kan være både positiv og negativ).

Finn og klassifiser eventuelle singulære punkter til denne ligningen.

d) Forklar hva som menes med *metoden med dominerende balanse*.

e) Hva er de mulige asymptotiske oppførsler for løsningene, $y(x)$, av ligning (3) når $x \to \infty$?

Oppgave 2

Se på integralet

$$I(\varepsilon) = \int_{\varepsilon}^{\infty} dt\, t^{-3/2}\, \mathrm{e}^{-t}, \tag{4}$$

der $\varepsilon \to 0$.

a) Bestem ledende ordens oppførsel for $I(\varepsilon)$ når $\varepsilon \to 0^+$.

b) Bestem de to neste leddene i utviklingen for $I(\varepsilon)$ når $\varepsilon \to 0^+$.

Oppgitt:

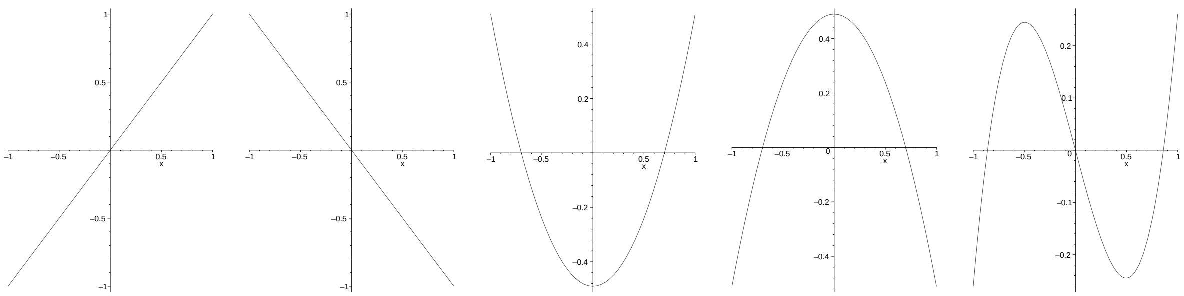
$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_{0}^{\infty} dt\, t^{-1/2}\, \mathrm{e}^{-t} = \sqrt{\pi}. \tag{5}$$

Oppgave 3

Se på et randverdiproblem av formen

$$\varepsilon y''(x) + a(x)y'(x) + y(x) = 0, \quad y(-1) = A, \quad y(1) = B, \tag{6}$$

der $\varepsilon \to 0^+$ og $a(x)$ er som antydet på figurene under.



Angi hvor du forventer at løsningen vil utvikle grensesjikt, og hvordan tykkelsen på disse vil skalere med ε,

a) når $a(x) = x$, som antydet på figuren helt til venstre over,

b) når $a(x) = -x$, som antydet på figur nummer to fra venstre over,

c) når $a(x) = (x + 0.7)(x - 0.7)$, som antydet på figuren i midten over,

d) når $a(x) = -(x + 0.7)(x - 0.7)$, som antydet på figur nummer to fra høyre over,

e) når $a(x) = x(x + 0.86)(x - 0.86)$, som antydet på figuren helt til høyre over.

Oppgave 4

Se på randverdiproblemet

$$\varepsilon\, y''(x) - \frac{1}{2 - x^2}\, y(x) = -1, \quad y(-1) = y(1) = 0, \tag{7}$$

der $\varepsilon \to 0^+$, og analyser dette ved bruk av grensesjiktmetoden.

a) Finn den *ytre* løsningen, $y(x)$, til ligning (7).

b) Finn den (de) *indre* løsningen (løsningene), $Y(X)$, til ligning (7).

c) Skriv ned en *uniform* løsning, $y_{\text{uniform}}(x)$, til ligning (7).

Oppgave 5

Se på randverdiproblemet

$$\varepsilon^2 y''(x) - \frac{1}{2 - x^2}\, y(x) = 0, \tag{8}$$

der $\varepsilon \to 0^+$ med $y(-1)$ og $y(1)$ gitt, og analyser dette ved bruk av WKB–metoden.

a) Finn først den generelle, ledende ordens WKB-løsning til ligning (8), gyldig i intervallet $[-1, 1]$.

b) Sett $y(-1) = y(1) = 1$, og finn ledende ordens WKB-løsning for dette tilfellet. Kall verdien av $y'(-1)$ for C_+.

c) Sett $y(-1) = 1$, $y(1) = -1$ og finn ledende ordens WKB-løsning for dette tilfellet. Kall verdien av $y'(-1)$ for C_-.

d) Estimer differansen $\Delta C = C_+ - C_-$ for $\varepsilon = 0.1$, $\varepsilon = 0.01$, og $\varepsilon = 0.001$.

Oppgitt:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2 - x^2}} = \frac{\pi}{4} \tag{9}$$