NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Jan Myrheim
Telefon: 73 59 36 53 (mobil 900 75 172)

Eksamen i fag FY8304/FY3107
Matematiske approksimasjonsmetoder i fysikken
Onsdag 7. desember 2016
Tid: 09:00–13:00

Sensurfrist: Lørdag 7. januar 2017

Tillatte hjelpemidler: Kalkulator, matematiske tabeller.

Alle deloppgaver teller likt ved sensuren.

Oppgave 1:

a) Hva menes med at et sett av differensialligninger er autonomt?

Hvordan kan et ikke-autonomt sett av ligninger gjøres autonomt?

b) Vis at Hamilton-funksjonen H er en bevegelseskonstant i et autonomt system der koordinatene $q_j(t)$ og impulsene $p_j(t)$ for $j = 1, 2, \ldots, n$ oppfyller Hamiltons ligninger

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} , \qquad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} .$$

c) I resten av denne oppgaven ser vi på følgende bevegelsesligninger:

$$\dot{x} = y , \qquad \dot{y} = x^2 - 1 . \tag{1}$$

Finn fikspunktene, og klassifiser dem. Et fikspunkt kan være stabilt, ustabilt eller marginalt stabilt. Det kan være et sadelpunkt, en spiral, et senter eller en stjerne.

Grunngi svarene.

d) Vis at det finnes en såkalt homoklin bane, som nærmer seg et fikspunkt i grensen $t \to -\infty$, og som nærmer seg det samme fikspunktet i grensen $t \to +\infty$.

e) Skissér et faseportrett av dette dynamiske systemet, det vil si typiske eksempler på hvordan punktet $(x(t), y(t))$ beveger seg i planet.

f) Hva menes med en spontan singularitet, også kalt en flyttbar singularitet, til en løsning av en differensialligning?

Vis at noen av løsningene til ligningssystemet (1) har spontane singulariteter.

Oppgave 2:

a) Cauchys integralformel for en analytisk funksjon $f(z)$ sier at

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_C \mathrm{d}t \, \frac{f(t)}{t - z} \ ,$$

der C er en vilkårlig lukket kurve som går en gang rundt z i positiv omløpsretning (mot klokken). Bruk denne formelen til å vise at

$$\frac{1}{n!} = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_C \mathrm{d}t \, \frac{\mathrm{e}^t}{t^{n+1}} \ , \tag{2}$$

der C er en lukket kurve som går en gang rundt 0.

b) Sett $t = (n+1)s$ i integralet i ligning (2), det gir at

$$\frac{1}{n!} = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}\,(n+1)^n} \oint_{C'} \mathrm{d}s \, \left(\frac{\mathrm{e}^s}{s}\right)^{n+1} , \tag{3}$$

der $C' = C/(n+1)$. Definer

$$g(s) = \left(\frac{\mathrm{e}^s}{s}\right)^{n+1} .$$

Siden C' er en vilkårlig kurve rundt $s = 0$, kan vi la den gå gjennom et punkt $s = s_0$ der absoluttverdien av integranden, $|g(s)|$, har et sadelpunkt. Finn s_0.

Når $g(s)$ er en analytisk funksjon av s, så er s_0 et sadelpunkt for $|g(s)|$ hvis $g'(s_0) = 0$ og $g''(s_0) \neq 0$. Du behøver ikke bevise denne påstanden her.

c) Bruk metoden med brattest nedstigning fra sadelpunktet (engelsk: steepest descent) til å finne den ledende asymptotiske oppførselen til integralet i ligning (3) når $n \to \infty$.

Du løser oppgaven enklest ved å tilnærme kurven for brattest nedstigning med en rett linje. Følgende formler kan vise seg nyttige:

$$\begin{aligned} 1 + x &= \mathrm{e}^{\ln(1+x)} = \mathrm{e}^{x - \frac{x^2}{2} + \dots} \ , \\ \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \, \mathrm{e}^{-x^2} &= \sqrt{\pi} \ . \end{aligned}$$

Oppgave 3:

Gitt differensialligningen

$$y''(x) + \frac{1}{\sin x}\, y'(x) + \frac{1}{\cos x}\, y(x) = 0 \ .$$

a) Finn de singulære punktene til ligningen, og klassifiser dem.

b) Finn den ledende asymptotiske oppførselen til $y(x)$ i hvert singulært punkt.

The Norwegian University of Science and Technology
Department of Physics

Contact person:
Name: Jan Myrheim
Telephone: 73 59 36 53 (mobile 900 75 172)

Examination, course FY8304/FY3107
Mathematical approximation methods in physics
Wednesday December 7, 2016
Time: 09:00–13:00

Grades made public: Saturday January 7, 2017

Allowed to use: Calculator, mathematical tables.

All subproblems are given the same weight in the grading.

Problem 1:

a) What does it mean that a set of differential equations is autonomous?

How can a non-autonomous set of equations be made autonomous?

b) Show that the Hamiltonian H is a constant of motion in an autonomous system where the coordinates $q_j(t)$ and the momenta $p_j(t)$ for $j = 1, 2, \ldots, n$ satisfy Hamilton's equations

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} \,, \qquad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \,.$$

c) In the rest of this problem we consider the following equations of motion:

$$\dot{x} = y \,, \qquad \dot{y} = x^2 - 1 \,. \tag{1}$$

Find the fixed points, and classify them. A fixed point may be stable, unstable, or marginally stable. It may be a saddle point, a spiral, a centre, or a star.

Give reasons for your answers.

d) Show that there exists a so called homoclinic orbit, which approaches a fixed point in the limit $t \to -\infty$, and approaches the same fixed point in the limit $t \to +\infty$.

e) Sketch a phase portrait of this dynamical system, that is, typical examples of how the point $(x(t), y(t))$ moves in the plane.

f) What is meant by a spontaneous singularity, also called a movable singularity, of a solution of a differential equation?

Show that some of the solutions of the system of equations (1) have spontaneous singularities.

Problem 2:

a) Cauchy's integral formula for an analytic function $f(z)$ says that

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_C \mathrm{d}t\, \frac{f(t)}{t-z} \ ,$$

where C is an arbitrary closed curve winding once around z in the positive (anticlockwise) direction. Use this formula to show that

$$\frac{1}{n!} = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_C \mathrm{d}t\, \frac{\mathrm{e}^t}{t^{n+1}} \ , \tag{2}$$

where C is a closed curve winding once around 0.

b) Set $t = (n+1)s$ in the integral in equation (2), this gives that

$$\frac{1}{n!} = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}\,(n+1)^n} \oint_{C'} \mathrm{d}s\, \left(\frac{\mathrm{e}^s}{s}\right)^{n+1} \ , \tag{3}$$

where $C' = C/(n+1)$. Define

$$g(s) = \left(\frac{\mathrm{e}^s}{s}\right)^{n+1} \ .$$

Since C' is an arbitrary curve around $s = 0$, we may take it to pass through a point $s = s_0$ where the absolute value of the integrand, $|g(s)|$, has a saddle point. Find s_0.

When $g(s)$ is an analytic function of s, then s_0 is a saddle point of $|g(s)|$ if $g'(s_0) = 0$ and $g''(s_0) \neq 0$. You need not prove this statement here.

c) Use the method of steepest descent from the saddle point to find the leading asymptotic behaviour of the integral in equation (3) when $n \to \infty$.

You solve this problem in the simplest way by aproximating the curve of steepest descent by a straight line. The following formulas may prove useful:

$$\begin{aligned} 1 + x &= \mathrm{e}^{\ln(1+x)} = \mathrm{e}^{x - \frac{x^2}{2} + \dots} \ , \\ \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^{-x^2} &= \sqrt{\pi} \ . \end{aligned}$$

Problem 3:

Given the differential equation

$$y''(x) + \frac{1}{\sin x}\, y'(x) + \frac{1}{\cos x}\, y(x) = 0 \ .$$

a) Find the singular points of the equation, and classify them.

b) Find the leading asymptotic behaviour of $y(x)$ at every singular point.