

**Fag 74943 Matematiske approksimasjonsmetoder i fysikken**

**LØSNINGSFORSLAG TIL EKSAMEN 13.12.1990**

1. Ligningen var

$$\left[ \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} + \frac{1}{x^4} \right] y(x) = 0. \quad (1)$$

(a) Vi ser direkte at (1) har et irregulært singulært punkt i  $x = 0$ . Ved transformasjonen  $t = 1/x$ ,  $Y(t) = y(x)$ , dvs.

$$\frac{1}{x} \frac{d}{dx} = t \left( -t^2 \frac{d}{dt} \right), \quad \frac{d^2}{dx^2} = \left( -t^2 \frac{d}{dt} \right)^2 = t^4 \frac{d^2}{dt^2} + 2t \frac{d}{dt},$$

får vi ligningen

$$\left[ \frac{d^2}{dt^2} + \frac{1}{t} \frac{d}{dt} + 1 \right] Y(t) = 0, \quad (2)$$

som sees å ha et regulært singulært punkt i  $t = 0 \Leftrightarrow x = \infty$ .

(b) i. Når  $x \rightarrow 0$  gjør vi den eksponensielle substitusjonen,

$$y = e^S,$$

og finner

$$(S')^2 + S'' + \frac{1}{x} S' + \frac{1}{x^4} = 0. \quad (3)$$

Antar at  $S'' \ll (S')^2$  når  $x \rightarrow 0$ . Ledende balanse blir da

$$(S')^2 + \frac{1}{x} S' + \frac{1}{x^4} \Rightarrow S' = \mp \frac{i}{x^2} + O\left(\frac{1}{x}\right),$$

som er konsistent med antagelsen. Merk at også  $x^{-1} S'$ -leddet i (3) er neglisjerbart til ledende orden. Vi skriver så

$$S = S_0 + S_1 + \dots \equiv \pm \frac{i}{x} + S_1 + \dots$$

som innsatt gir

$$2S'_0 S'_1 + S''_0 + \frac{1}{x} S'_0 = \mp i \left( \frac{2}{x^2} S'_1 - \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^3} \right) = 0,$$

dvs.

$$S'_1 = \frac{1}{2x} \Rightarrow S_1 = \log \sqrt{x}.$$

Mulig asymptotisk oppførsel når  $x \rightarrow 0$  er altså

$$y(x) \sim \sqrt{x} e^{\pm i x^{-1}}. \quad (4)$$

ii. Siden  $x = 1$  er et ordinært punkt for (1) må

$$y(x) \sim 1, \text{ eller } y(x) \sim (x-1), \quad (5)$$

når  $x \rightarrow 1$ .

- iii. Siden  $x = \infty$  er et regulært singulært punkt antar vi at  $y(x) \sim x^{-\nu}$  når  $x \rightarrow \infty$ . Dette fører til indicieligningen

$$\nu(\nu + 1) - \nu = \nu^2 = 0,$$

med løsning  $\nu = 0$  (dobbeltrøt). Altså vil

$$y(x) \sim 1, \text{ eller } y(x) \sim \log x, \quad (6)$$

når  $x \rightarrow \infty$ .

*Kommentar:* Ligning (2) er Bessel-ligningen (av orden 0), så den generelle løsningen til (1) er

$$y(x) = c_1 J_0(x^{-1}) + c_2 Y_0(x^{-1}),$$

med asymptotiske oppførsler slik vi har funnet over.

2. (a) Integralet var

$$n! = \Gamma(n+1) = \int_0^\infty dt t^n e^{-t} \equiv \int_0^\infty dt e^{\varphi(t)}. \quad (7)$$

- i. Integranden har et bevegelig maksimum  $t_m$ , der

$$\varphi'(t_m) = \frac{n}{t_m} - 1 = 0,$$

dvs.  $t_m = n$ . Videre er

$$\varphi''(t_m) = -\frac{n}{t_m^2} = -\frac{1}{n},$$

slik at sadelpunktmetoden gir

$$\begin{aligned} n! &\approx e^{\varphi(t_m)} \int_{-\infty}^{\infty} du \exp \left\{ \frac{1}{2} \varphi''(t_m) u^2 \right\} = \sqrt{\frac{2\pi}{-\varphi''(t_m)}} e^{\varphi(t_m)} \\ &= \sqrt{2\pi n} e^{n \log n - n}. \end{aligned} \quad (8)$$

Her faller den opprinnelige integrasjonsveien sammen med 'steepest decent'-veien, slik at vi ikke trenger å bekymre oss om deformasjon av integrasjonvei.

- ii. Vi kan gjenta den samme prosedyren når  $n \rightarrow i\nu = e^{i\pi/2}\nu$  ( $\nu \rightarrow \infty$ ). Dersom integrasjonsveien kan deformeres til å gå gjennom sadelpunktet på en 'steepest decent' vei må vi få (ved å substituere  $n \rightarrow e^{i\pi/2}\nu$  i ligning (8))

$$\Gamma(1 + i\nu) \approx \sqrt{2\pi\nu} e^{-(\pi\nu/2)} e^{i(\nu \log \nu - \nu + \pi/4)}. \quad (9)$$

Det gjenstår å finne 'steepest decent' veien, og å verifisere at deformasjonen er mulig. Vi går først til polarkoordinater,  $t = \rho e^{i\phi}$ . I sadelpunktet,  $t_m = \nu e^{i\pi/4}$ , er  $\Im \varphi = \nu \log \nu - \nu$ . 'Steepest descent' veien, som må tilfredsstille ligningen

$$\Im \varphi(t) = \nu \log \rho - \rho \sin \phi = \nu \log \nu - \nu, \quad (10)$$

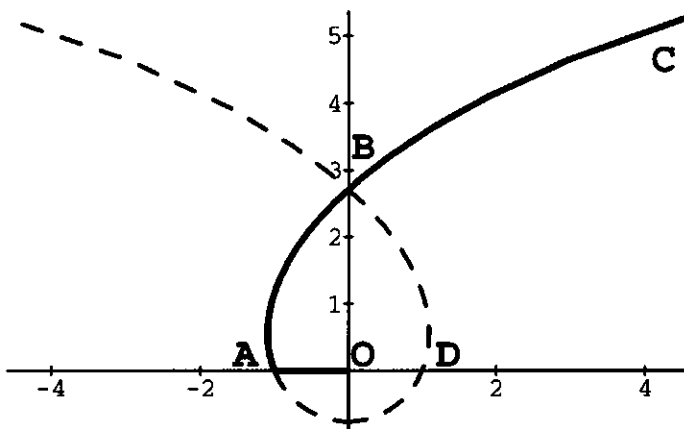
kan parametriseres som

$$\sin \phi = -e\xi \log \xi, \quad (11)$$

der  $\xi = \nu/\rho$ . Analyse nær sadelpunktet viser at 'steepest descent' veien krysser den imaginære akse under vinkel  $\pi/4$ , og at vi har en 'steepest ascent' vei som krysser den imaginære akse under vinkel  $-\pi/4$ . Vi ser videre at  $\sin \phi = 0$  (dvs.  $\phi = 0, \pi$ ) for  $\xi = 1$  og for  $\xi \rightarrow \infty$ . 'Steepest descent' veien vil derfor ikke fjerne seg uakseptabelt mye fra positiv reell akse for store  $\rho$  (dvs. små  $\xi$ ). Den krysser negativ

reell akse i punktet  $t = -\nu/e$ . For å deformere den opprinnelige integrasjonsveien over i 'steepest decent' veien må vi derfor addere et integral fra  $t = 0$  til  $t = -\nu/e$  (med en liten positiv imaginærdel). Men på denne veien er integranden  $e^{\varphi(t)} \leq e^{-\nu(\pi - e^{-1})}$ , som er eksponensielt lite i forhold til verdien i sadelpunktet ( $|e^{\varphi(t_m)}| = e^{-\nu\pi/2}$ ), slik at bidraget til integralet fra dette intervallet er subdominant og kan neglisjeres. Resultatet (9) er derfor korrekt.

En nøyaktig figur av løsningen til (10) er som følger:



Her er den deformerte integrasjonsveien lik kurven

$$O \equiv (0, 0) \rightarrow A \equiv (-\nu/e, \epsilon) \rightarrow B \equiv (0, \nu) \rightarrow C \equiv (\infty, \infty),$$

med sadelpunktet i B.

*Kommentar:* Steepest ascent veien,  $(B \rightarrow D \rightarrow A \rightarrow B)$  er som hentet fra en Escher'sk verden: Vi går stadig i motbakke, men ender likevel tilbake ved utgangspunktet. Årsaken er at  $\Re\varphi$  ikke er en entydig definert funksjon, men øker med  $2\pi\nu$  når vi foretar rundturen  $(B \rightarrow D \rightarrow A \rightarrow B)$ .

(b) i. Vi har

$$\begin{aligned} I(N) &= \int_0^\infty dt e^{-(t+N)^2} = e^{-N^2} \int_0^\infty dt e^{-2Nt} e^{-t^2} \\ &= \frac{1}{2N} e^{-N^2} \int_0^\infty du e^{-u} e^{-u^2/4N^2} \\ &= \frac{1}{2N} e^{-N^2} \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{1}{2N}\right)^{2k} (2k)!. \end{aligned} \quad (12)$$

ii. Vi bør ta med ledd i rekken  $\sum_k a_k$  til koeffisientene  $a_k$  begynner å vokse igjen, dvs. til

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{(2k+1)(2k+1)}{k+1} \frac{1}{4N^2} = 1,$$

slik at

$$k_{opt} \approx N^2. \quad (13)$$

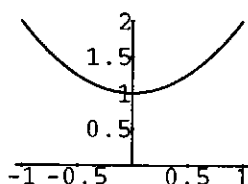
iii. Den oppnåelige nøyaktigheten kan forventes å være av samme størrelsesorden som det siste leddet vi tok med, dvs. omtrent lik

$$\begin{aligned} a_{k_o} &\approx \frac{1}{2N} e^{-N^2} \sqrt{2e} - [k_o \log k_o + (1 + \log 4)k_o] \\ &= \frac{1}{N} e^{-N^2} [\log(4N^2) + 2]. \end{aligned} \quad (14)$$

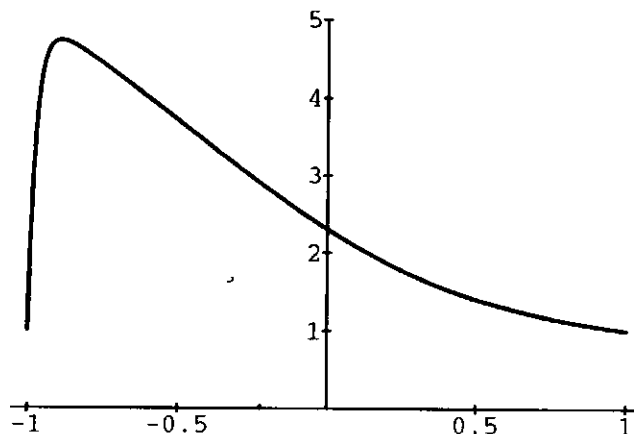
3. I denne oppgaven skulle vi gi en kvalitativ analyse av randverdi problemet

$$\varepsilon y''(x) + a(x)y'(x) + y(x) = 0, \quad y(-1)=y(1)=1.$$

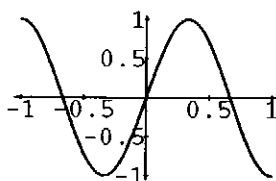
(a) Med  $a(x) = 1 + x^2$ , som i figuren under



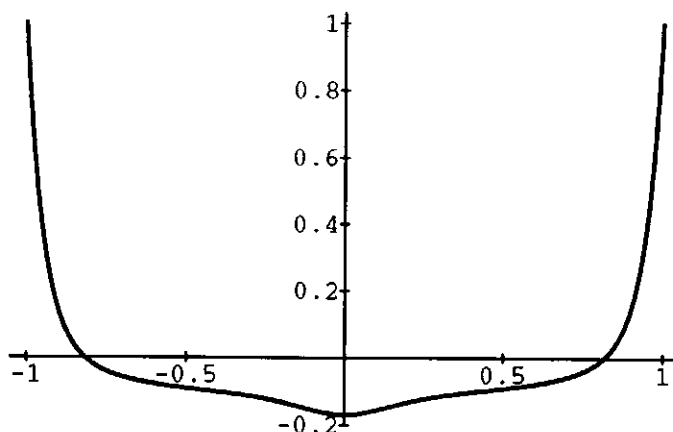
får vi etter de generelle reglene et grensesjikt av tykkelse  $\varepsilon$  ved  $x = -1$ . (Siden  $a(x) \neq 0$  i det aktuelle intervallet  $(-1, 1)$  kan vi ikke ha indre grensesjikt. Siden videre  $a(x) > 0$  er det bare konsistent å ha grensesjiktet ved venstre rand.) Vi kan teste denne konklusjonen mot numerisk løsning av problemet, som i figuren under:



(b) Med  $a(x) = \sin(\frac{3\pi}{2}x)$ , som i figuren under

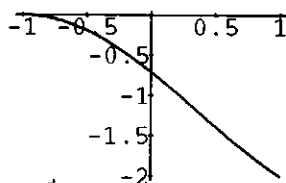


får vi etter de generelle reglene grensesjikt av tykkelse  $\varepsilon$  ved  $x = -1$  og  $x = 1$ , med  $y(x) \approx 0$  inne i intervallet  $(-1, 1)$ . (Siden  $a(-1) > 0$  og  $a(1) < 0$  er begge endene tillatte posisjoner for grensesjikt av tykkelse  $\varepsilon$ . Siden  $a(0) = 0$ , med  $a'(0) > 0$ , er dette en tillatt posisjon for et indre grensesjikt av tykkelse  $\sqrt{\varepsilon}$ . Men siden  $a(\pm\frac{2}{3}) = 0$ , med  $a'(\pm\frac{2}{3}) < 0$  vil vi få en indre løsninger som vokser eksponentielt når  $\varepsilon \rightarrow 0$ , dersom ikke  $y(\pm\frac{2}{3}) \approx 0$ .) Vi kan teste denne konklusjonen mot en numerisk løsning av problemet, som i figuren på neste side:



Som vi ser overlever en viss struktur i løsningen ved det indre nullpunktet  $x = 0$  for  $a(x)$ .

(c) Med  $a(x) = -(1+x)\sin[\frac{\pi}{4}(1+x)]$ , som i figuren under



kan vi etter de generelle reglene ha et grensesjikt av tykkelse  $\varepsilon$  ved  $x = 1$ . Punktet  $x = -1$  må analyseres videre, siden  $a(x)$  har en dobbeltrot der. Den ytre ligningen blir nær  $x = -1$

$$y'(x) \approx \frac{4}{\pi} \frac{1}{(x+1)^2} y(x), \quad (15)$$

med løsning

$$y(x) \sim C \exp\left(-\frac{4}{\pi} \frac{1}{x+1}\right) \rightarrow 0 \text{ når } x \rightarrow -1^+. \quad (16)$$

Det er derfor ikke mulig å oppfylle venstre randbetingelse med den ytre løsningen alene, så vi må ha en form for grensesjikt ved  $x = -1$  også. For å analysere oppførselen her innfører vi indre variable

$$X = (x+1)/\delta, \quad Y(X) = y(x+1),$$

og finner vi til ledende orden ved  $x = -1$ :

$$\frac{\varepsilon}{\delta^2} Y''(X) + \delta X^2 Y'(X) + Y(X) = 0. \quad (17)$$

Vi finner at dominerende balanse kan opptre mellom første og tredje ledd i denne ligningen, med  $\delta = \sqrt{\varepsilon}$ . Dette gir en indre løsning av formen

$$Y(X) = \cos X + C \sin X, \quad (18)$$

som altså ikke svarer til et grensesjikt av konvensjonell type, men i stedet er av 'WKB-type'. For å finne tykkelsen på oscillasjons-området transformerer vi ligningen til standard WKB form (nær  $x = -1$ )

$$\epsilon^2 f''(x) + Q(x)f(x) = 0,$$

ved å innføre

$$y(x) = \exp \left[ \frac{\pi}{24\epsilon} (x+1)^2 \right] f(x).$$

Det gir

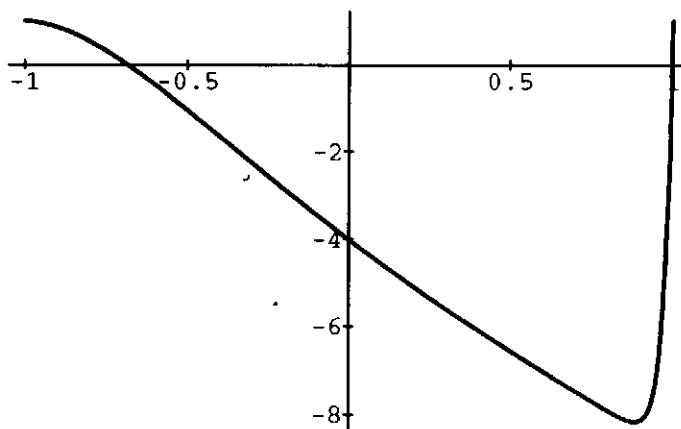
$$\epsilon f'' + \left[ 1 - \frac{\pi^2}{32\epsilon} (x+1)^2 + \dots \right] f = 0. \quad (19)$$

Overgangen fra oscillerende til eksponensiell oppførsel skjer altså ved vendepunktet ( $Q(x) = 0$ )

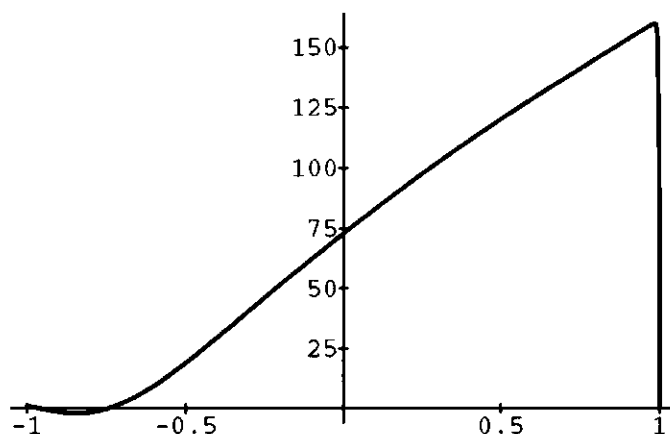
$$x+1 = \frac{4}{\pi} \sqrt{2\epsilon}. \quad (20)$$

Løsningen har altså et oscillerende grensesjikt av tykkelse  $\sqrt{\epsilon}$  ved  $x = -1$ . Til høyre for dette grensesjiktet vil løsningen generelt vokse eksponensielt med  $\epsilon^{-1}$ .

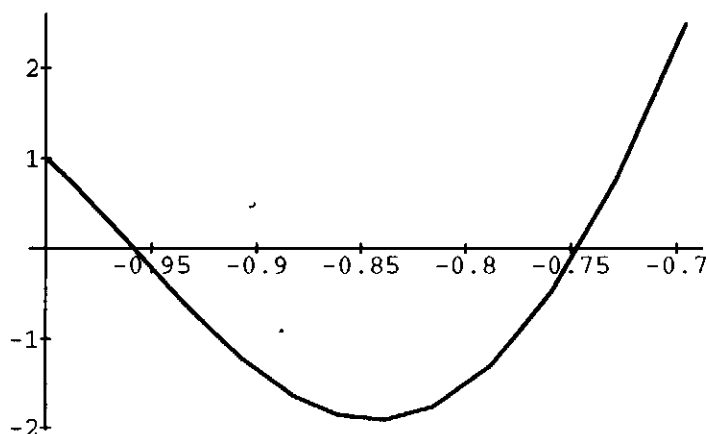
Det er en stor numerisk utfordring å teste disse konklusjonene mot numerisk løsning av problemet, men et begynnende mønster kommer til syne ettersom vi minsker  $\epsilon$ . For  $\epsilon = 0.05$  blir løsningen som i figuren under:



Det oscillerende grensesjiktet er ikke spesielt tydelig over, siden det høyst kan sies å inneholde en halv oscillasjon. For  $\epsilon = 0.001$  blir den numeriske løsningen som i figuren på neste side:



Selv om ikke oscillasjoner er det mest prominente trekk ved denne figuren heller, ser vi indikasjoner på at det er i ferd med å utvikle seg en struktur nær  $x = -1$ . Når vi bare fokuserer oppmerksomheten på dette området finner vi omtrent én oscillasjon:



4. Ligningen var

$$\ddot{y} + e^{\epsilon t} y = 0, \text{ med } y(0) = 1, \dot{y}(0) = 0. \quad (21)$$

Ved å gjøre substitusjonen  $\tau = \epsilon t$ ,  $Y(\tau) = y(t)$  fås ligningen

$$\epsilon^2 \ddot{Y} + e^{\tau} Y = 0,$$

som er på naturlig form for WKB-approksimasjonen. Vi skriver partikulærløsninger på formen

$$f(\tau) = e^{S(\tau)/\epsilon},$$

og finner ligningen

$$\dot{S}^2 + e^{\tau} = -\epsilon \ddot{S}$$

Vi skriver  $S = S_0 + \epsilon S_1 + \dots$  og finner

$$\dot{S}_0 = \pm i e^{\tau/2}, \quad \dot{S}_1 = -\frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} \dot{S}_0 = -\frac{1}{4},$$

slik at to partikulær-løsninger er

$$f_{\pm}(\tau) \approx e^{-\tau/4} \exp \left[ \pm i \frac{2}{\varepsilon} (e^{\tau/2} - 1) \right].$$

Løsningen på (21) er en lineærkombinasjon av disse. Ved å ta hensyn til startbetingelsene finner vi

$$Y(\tau) = e^{-\tau/4} \cos \left[ \frac{2}{\varepsilon} (e^{\tau/2} - 1) \right] + O(\varepsilon). \quad (22)$$

*Kommentar:* Substitusjonen

$$z = \frac{2}{\varepsilon} e^{\varepsilon t/2}$$

transformerer ligning (21) til Bessel-ligningen

$$\left[ \frac{d^2}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{d}{dz} + 1 \right] y(z) = 0,$$

slik at den eksakte løsningen kan uttrykkes ved Bessel-funksjoner

$$y(t) = \frac{Y'_0(\frac{2}{\varepsilon})J_0(\frac{2}{\varepsilon}e^{\varepsilon t/2}) - J'_0(\frac{2}{\varepsilon})Y_0(\frac{2}{\varepsilon}e^{\varepsilon t/2})}{Y'_0(\frac{2}{\varepsilon})J_0(\frac{2}{\varepsilon}) - J'_0(\frac{2}{\varepsilon})Y_0(\frac{2}{\varepsilon})}. \quad (23)$$

Ved å sette inn de asymptotiske utviklingene for  $J_0(x)$  og  $Y_0(x)$  for store  $x$ ,

$$J_0(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left\{ \cos \left( x - \frac{\pi}{4} \right) + O(x^{-1}) \right\},$$

$$Y_0(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left\{ \sin \left( x - \frac{\pi}{4} \right) + O(x^{-1}) \right\},$$

$$J'_0(x) \sim -\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left\{ \sin \left( x - \frac{\pi}{4} \right) + O(x^{-1}) \right\},$$

$$Y'_0(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left\{ \cos \left( x - \frac{\pi}{4} \right) + O(x^{-1}) \right\},$$

i ligning (23), gjenfinner man løsningen (22).