LØSNINGSFORSLAG
EKSAMEN DIF4943
11. desember 2000

Oppgave 1

a) Vi bruker metoden med delvis integrasjon

$$\underline{y_1(x)} = \int_x^\infty d\xi\, e^{-\xi^2} = -\int_x^\infty \frac{d\xi}{2\xi}\frac{d}{d\xi}e^{-\xi^2} =$$

$$= \Big|_x^\infty -\frac{1}{2\xi}e^{-\xi^2} - \int_x^\infty \frac{d\xi}{2\xi^2}e^{-\xi^2}$$

$$= \underline{\frac{1}{2x}e^{-x^2}\left[1+\mathcal{O}(x^{-2})\right]}$$

b)

$$\underline{y_2(x)} = \int_0^x d\xi\, e^{\xi^2} = \int_0^1 d\xi\, e^{\xi^2} + \int_1^x d\xi\, e^{\xi^2} =$$

$$= \int_1^x \frac{d\xi}{2\xi}\frac{d}{d\xi}e^{\xi^2} + \int_0^1 d\xi\, e^{\xi^2} =$$

$$= \Big|_1^x \frac{1}{2\xi}e^{\xi^2} + \int_1^x \frac{d\xi}{2\xi^2}e^{\xi^2} + \int_0^1 d\xi\, e^{\xi^2}$$

$$= \underline{\frac{1}{2x}e^{x^2}\left[1+\mathcal{O}(x^{-2})\right]}$$

Bidragene fra nedre grense, $\xi = 1$, og fra integralet $\int_0^1 d\xi\, e^{\xi^2}$ er subdominante.

Oppgave 1 (2)

c) $y''(x) + axy'(x) + y(x) = 0$

Ingen singulære punkter for $|x| < \infty$.
For punktet $x = \infty$ innfører vi $u = \frac{1}{x}$, $Y(u) = y(x)$, og finner

$$u^2 \frac{d}{du} u^2 \frac{d}{du} Y(u) - \frac{a}{u} u^2 \frac{d}{du} Y(u) + Y(u) = 0.$$

Dvs.

$$Y''(u) + \left(\frac{2}{u} - \frac{a}{u^3}\right) Y'(u) + \frac{1}{u^4} Y(u) = 0$$

Altså et rang 3 irregulært singulært punkt i $x = \infty \Leftrightarrow u = 0$

d) Metoden med dominerende balanse:
I en ligning med mange ledd antar vi at to ledd er dominerende (dvs. mye større enn de andre), og at ligningen er oppfylt ved at ~~dominerende~~ disse to leddene balanserer hverandre.

e) $y''(x) + axy'(x) + y(x) = 0$

Gjør først en eksponensiell substitusjon

$$y = e^S \Rightarrow$$

$$(S'' + S'^2 + axS' + 1) = 0$$

Dominerende balanse

$$axS' \sim -1 \Rightarrow S \sim -\frac{1}{a} \log x + \text{konst.}$$

$$\Rightarrow y \sim C x^{-1/a}$$

Oppgave 1

e forts)

Antar dominerende balanse $(S \to S_0)$

$$S_0'^2 \sim -ax S_0' \Rightarrow \underline{S_0 \sim -\frac{1}{2}ax^2 + \text{konst.}}$$

Vi må se på korreksjonen til dette resultatet for å få en ledende ordens løsning for y: $S \to S_0 + S_1 + \dots$ gir

$$\underbrace{(S_0''+1)}_{(1-a)} + \underbrace{(S_0'^2 + axS_0')}_{=0} + \underbrace{+S_1'^2}_{\text{Neglisjeres}} + \underbrace{2S_0'S_1' + axS_1'}_{-axS_1'} = 0$$

Altså:

$$S_1' = \frac{1-a}{a}\frac{1}{x} = \left(\frac{1}{a}-1\right)\frac{d}{dx}\log x$$

Dette gir

$$S \sim -\frac{1}{2}ax^2 + \text{konst} + \log\left(x^{\frac{1}{a}-1}\right) + \dots$$

eller

$$\underline{y(x) \sim C' x^{\frac{1}{a}-1} e^{-\frac{1}{2}ax^2}}$$

Oppgave 1

e forts)
De mulige asymptotiske oppførslene er derfor

$$y(x) \sim C\, x^{-1/a}$$

eller

$$y(x) \sim C\, x^{1/a-1}\, e^{-\frac{1}{2}ax^2}$$

Alternativt kan man bruke dominerende balanse direkte for å løse dette problemet. Med samme resultat, selvsagt, hvis man gjør det riktig.

Oppgave 2

$$I(\varepsilon) = \int_\varepsilon^\infty dt\, t^{-3/2} e^{-t}$$

a) Ved delvis integrasjon

$$I(\varepsilon) = \int_\varepsilon^\infty dt \left(-2\frac{d}{dt} t^{-1/2}\right) e^{-t}$$

$$= \Big|_\varepsilon^\infty -2t^{-1/2} e^{-t} - 2\int_\varepsilon^\infty dt\, t^{-1/2} e^{-t}$$

$$= 2\varepsilon^{-1/2} e^{-\varepsilon} - 2\int_\varepsilon^\infty dt\, t^{-1/2} e^{-t}$$

$$\sim \frac{2}{\sqrt{\varepsilon}} \qquad \text{når } \varepsilon \to 0^+$$

Oppgave 2

b) Vi omskriver

$$-2\int_\varepsilon^\infty dt\, t^{-1/2} e^{-t} = -2\int_0^\infty dt\, t^{-1/2} e^{-t} + 2\int_0^\varepsilon dt\, t^{-1/2} e^{-t}$$

$$= -2\,\Gamma(1/2) + 2\int_0^\varepsilon dt\, t^{-1/2} \sum_{n=0}^\infty \frac{(-t)^n}{n!}$$

$$= -2\sqrt{\pi} + 4\sqrt{\varepsilon} + \mathcal{O}(\varepsilon^{3/2})$$

Fra a) ser vi at vi i tillegg har bidraget

$$2\,\varepsilon^{-1/2} e^{-\varepsilon} = \frac{2}{\sqrt{\varepsilon}} - 2\sqrt{\varepsilon} + \mathcal{O}(\varepsilon^{3/2})$$

slik at vi alt-ialt får

$$I(\varepsilon) \sim \frac{2}{\sqrt{\varepsilon}} - 2\sqrt{\pi} + 2\sqrt{\varepsilon} + \dots \quad \text{når } \varepsilon \to 0^+$$

Kommentar: Som en kontroll kan vi først beregne

$$I'(\varepsilon) = -\varepsilon^{-3/2} e^{-\varepsilon} = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n!}\, \varepsilon^{n-3/2}$$

ledd-for-ledd integrasjon av dette gir

$$I(\varepsilon) = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-)^{n+1}}{n!} \frac{1}{n-1/2}\, \varepsilon^{n-1/2} + \text{konst.}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\varepsilon}} + 2\sqrt{\varepsilon} + \dots + \text{konst.}$$

Her må integrasjonskonstanten bestemmes på annet vis. Den er altså $-2\sqrt{\pi}$.

Oppgave 3

a) Grensesjikt av tykkelse $\sqrt{\varepsilon}$ ved $x=0$.

b) Grensesjikt av tykkelse ε ved $x=-1$ og $x=1$.
(Og $y(x) \simeq 0$ i intervallet $(-1+\mathcal{O}(\varepsilon), 1-\mathcal{O}(\varepsilon))$)

c) Grensesjikt av tykkelse ε ved $x=-1$.
Grensesjikt av tykkelse $\sqrt{\varepsilon}$ ved $x=0.7$
(Og $y(x) \simeq 0$ i intervallet $(-1+\mathcal{O}(\varepsilon), 0.7-\mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon}))$,

d) Grensesjikt av tykkelse $\sqrt{\varepsilon}$ ved $x=-0.7$.
Grensesjikt av tykkelse ε ved $x=1$.
(Og $y(x) \simeq 0$ i intervallet $(-0.7+\mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon}), 1-\mathcal{O}(\varepsilon))$)

e) Grensesjikt av tykkelse $\sqrt{\varepsilon}$ ved $x=-0.86$.
Grensesjikt av tykkelse $\sqrt{\varepsilon}$ ved $x=0.86$
(Og $y(x) \simeq 0$ i intervallet $(-0.86+\underset{\uparrow\atop \mathcal{O}(\ )}{\sqrt{\varepsilon}}, 0.86-\underset{\uparrow\atop \mathcal{O}(\ )}{\sqrt{\varepsilon}})$).

Oppgave 4

$$\varepsilon y''(x) - \frac{1}{2-x^2}\, y(x) = -1 \;, \quad y(-1) = y(1) = 0 .$$

a) Den ytre løsningen finnes som alltid ved å sette $\varepsilon = 0$:

$$y(x) = 2 - x^2$$

b) Den ytre løsningen oppfyller ikke randbetingelsene, så vi må ha grensesjikt ved $x = \pm 1$. Innfører

$$X_1 = \frac{x+1}{\delta}, \quad Y_1(X_1) = y(x)$$

og

$$X_2 = \frac{1-x}{\delta}, \quad Y_2(X_2) = y(x)$$

Innsatt fås

$$\frac{\varepsilon}{\delta^2} Y_1''(X_1) - Y_1(X_1) = -1$$

$$\frac{\varepsilon}{\delta^2} Y_2''(X_2) - Y_2(X_2) = -1$$

Setter $\delta^2 = \varepsilon$. Den generelle løsningen av den indre ligningen er

$$Y_i(X_i) = 1 + C_1 e^{-X_i} + C_2 e^{X_i}$$

som matcher med den ytre løsningen når $X_i \to \infty$, dersom $C_1 = -1$, $C_2 = 0$.

Altså:

$$Y_1 = \left(1 - e^{-\frac{x+1}{\sqrt{\varepsilon}}}\right), \quad Y_2 = \left(1 - e^{-\frac{1-x}{\sqrt{\varepsilon}}}\right)$$

Oppgave 4

c) Ved inspeksjon ser vi at *)

$$y_{unif}(x) = Y_1 Y_2 (2-x^2)$$

$$= \left(1-e^{-(x+1)/\sqrt{\varepsilon}}\right)\left(1-e^{-(1-x)/\sqrt{\varepsilon}}\right)(2-x^2)$$

Kommentar:

Ved å skrive

$$y(x) = \frac{2-x^2}{1+2\varepsilon} - f(x)$$

fås en homogen ligning for f:

$$\varepsilon f''(x) - \frac{1}{2-x^2} f(x) = 0, \quad f(-1) = f(1) = \frac{1}{1+2\varepsilon}$$

som kan løses ved WKB-metoden (jfr. neste oppgave).

---

*) Det er også andre måter å skrive dette på, f. eks

$$y_{unif}(x) = (2-x^2) - e^{-(x+1)/\sqrt{\varepsilon}} - e^{-(1-x)/\sqrt{\varepsilon}}$$

Oppgave 5

$$\varepsilon^2 y''(x) - \frac{1}{2-x^2} y(x) = 0$$

a) Dette er et standard WKB-problem, med

$$Q(x) = -\frac{1}{2-x^2}$$

Den generelle, ledende ordens WKB-løsning er derfor

$$\underline{y(x)} = C_A \left(\frac{1}{-Q(x)}\right)^{1/4} e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x d\xi \sqrt{-Q(\xi)}} + C_B \left(\frac{1}{-Q(x)}\right)^{1/4} e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x d\xi \sqrt{-Q(\xi)}}$$

$$= (2-x^2)^{1/4}\left[C_A e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x \frac{d\xi}{\sqrt{2-\xi^2}}} + C_B e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x \frac{d\xi}{\sqrt{2-\xi^2}}}\right]$$

$$= (2-x^2)^{1/4}\left[C_A e^{\frac{1}{\varepsilon}\mathrm{Arcsin}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)} + C_B e^{-\frac{1}{\varepsilon}\mathrm{Arcsin}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)}\right]$$

(Det kreves ikke at man skal kunne utføre integralet

$$\int_0^x \frac{d\xi}{\sqrt{2-\xi^2}} = \int_0^{x/\sqrt{2}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \mathrm{Arcsin}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$

).

Oppgave 5

b) Fra løsningen i pkt a) finner vi, siden

$$\int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{2-\xi^2}} = \frac{\pi}{4},$$

$$y(-1) = C_A e^{-\frac{\pi}{4\varepsilon}} + C_B e^{\frac{\pi}{4\varepsilon}} = 1$$

$$y(1) = C_A e^{\frac{\pi}{4\varepsilon}} + C_B e^{-\frac{\pi}{4\varepsilon}} = 1$$

Ved symmetri ser vi at $C_A = C_B$, og derav

$$\underline{C_A = C_B} = \frac{1}{e^{\pi/4\varepsilon} + e^{-\pi/4\varepsilon}} = \underline{\frac{1}{2 \cancel{\sinh} \cosh \frac{\pi}{4\varepsilon}}}$$

Ved logaritmisk derivasjon finner vi så

$$\underline{C_+} \equiv y'(-1) = \left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{2}\right) C_A e^{-\frac{\pi}{4\varepsilon}} - \left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{2}\right) C_B e^{\frac{\pi}{4\varepsilon}}$$

$$\underline{\underline{= -\frac{1}{\varepsilon} \tanh \frac{\pi}{4\varepsilon} - \frac{1}{2}}}$$

($C_+ = -\frac{1}{\varepsilon}$ godtas som svar på dette punktet)

c) Fra løsningen i pkt a) finner vi

$$y(-1) = C_A e^{-\frac{\pi}{4\varepsilon}} + C_B e^{\frac{\pi}{4\varepsilon}} = 1$$

$$y(1) = C_A e^{\frac{\pi}{4\varepsilon}} + C_B e^{-\frac{\pi}{4\varepsilon}} = -1$$

Ved symmetri ser vi at $C_A = -C_B$, og derav

$$\underline{C_A = -C_B} = \frac{-1}{e^{\pi/4\varepsilon} - e^{-\pi/4\varepsilon}} = \underline{\frac{-1}{2 \sinh \frac{\pi}{4\varepsilon}}}$$

Ved logaritmisk derivasjon finner vi

$$\underline{C_-} \equiv y'(-1) = \left(\frac{1}{\varepsilon}-\frac{1}{2}\right)C_A e^{-\frac{\pi}{4\varepsilon}} - \left(\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{2}\right)C_B e^{\frac{\pi}{4\varepsilon}}$$

$$= -\frac{1}{\varepsilon}\coth\frac{\pi}{4\varepsilon} - \frac{1}{2}$$

($C_- = -\frac{1}{\varepsilon}$ godtas som svar på dette punktet)

d)

$$\underline{\Delta C} = C_+ - C_- = \frac{1}{\varepsilon}\left(\coth\frac{\pi}{4\varepsilon} - \tanh\frac{\pi}{4\varepsilon}\right)$$

$$= \frac{2}{\varepsilon \sinh\frac{\pi}{2\varepsilon}}$$

$\varepsilon = 0,1 \Rightarrow \Delta C = 0.6\cdot 10^{-5}$

$\varepsilon = 0.01 \Rightarrow \Delta C = 0.24\cdot 10^{-65}$

$\varepsilon = 0.001 \Rightarrow \Delta C = 0.26\cdot 10^{-678}$

Kommentar: Dette illustrerer hvor vanskelig det er å løse randverdiproblemer numerisk vhja "shooting"-metoden. En ørliten endring i startverdiene $y(-1)$, $y'(-1)$ gjør store endringer i sluttverdien $y(1)$.