



Løsningsforslag til eksamen i
FY3403 PARTIKKELFYSIKK
 Tirsdag 14. desember 2004

Dette løsningsforslaget er på 6 sider.

Oppgave 1. Δ -resonansene

- a) Beskriv de laveste spinn- $\frac{3}{2}$ tilstandene man kan lage av tre kvarker fra første generasjon (dvs. av u - og d -kvarker). Angi kvarkinnhold, navn og ladning for hver tilstand.

Se tabellen i neste punkt.

- b) Tilstandene i forrige punkt kan klassifiseres som en isospinn multiplett. Angi isospinn klassifiseringen, $|I I_z\rangle$, for hver tilstand.

Navn	Kvarkinnhold	Ladning	$ I I_z\rangle$
Δ^{++}	uuu	2	$ \frac{3}{2} \frac{3}{2}\rangle$
Δ^+	uud	1	$ \frac{3}{2} \frac{1}{2}\rangle$
Δ^0	udd	0	$ \frac{3}{2} -\frac{1}{2}\rangle$
Δ^-	ddd	-1	$ \frac{3}{2} -\frac{3}{2}\rangle$

- c) Disse tilstandene er ganske ustabile, de viktigste henfallsmodene for f.eks. Δ^+ er

$$\Delta^+ \rightarrow \pi^0 + p \quad \text{og} \quad \Delta^+ \rightarrow \pi^+ + n.$$

Angi for de to tilfellene isospinn klassifiseringen $|I_1 I_{1z}\rangle |I_2 I_{2z}\rangle$ av tilstanden på høyresiden, der 1 refererer til pionet og 2 til nukleonet.

$$|\pi^0 p\rangle = |1 0\rangle |\frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle \quad (1)$$

$$|\pi^+ n\rangle = |1 1\rangle |\frac{1}{2} -\frac{1}{2}\rangle \quad (2)$$

- d) På grunn av isospinn symmetri vil amplituden for henfallsraten være proporsjonal med overlappet mellom $|I I_z\rangle$ til starttilstanden og $|I_1 I_{1z}\rangle |I_2 I_{2z}\rangle$ til slutttilstanden. Bruk tabellene vedlagt sist i oppgavesettet til å finne dette overlappet i de to tilfellene.

Vi leser ut av tabellen for $1 \times \frac{1}{2}$ at

$$|\frac{3}{2} \frac{1}{2}\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}} |1 1\rangle |\frac{1}{2} -\frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} |1 0\rangle |\frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle. \quad (3)$$

Overlappet er altså $\sqrt{\frac{2}{3}}$ for $|\pi^0 p\rangle$ og $\sqrt{\frac{1}{3}}$ for $|\pi^+ n\rangle$.

e) Hva er den relative hyppigheten av de to henfallsmodene?

Henfall til $\pi^0 + p$ vil skje dobbelt så ofte som til $\pi + n$.

f) En forenklet modell for disse to henfallene er gitt ved Feynmanreglene nedenfor



der altså den numeriske verdien tilordnet henfallsknutene er henholdsvis $ig_1 m_\Delta$ og $ig_2 m_\Delta$.

Hva må forholdet mellom g_1 og g_2 være for at Feynmanreglene skal gi henfallsrater som er konsistent med isospinn symmetri? Vi setter $m_{\pi^+} = m_{\pi^0}$ og $m_p = m_n$.

Siden $\Gamma_i \propto |\mathcal{M}_i|^2 \propto g_i^2$ må $g_1/g_2 = \sqrt{2}$. Vi kan derfor skrive $g_1 = \sqrt{\frac{2}{3}} g$ og $g_2 = \sqrt{\frac{1}{3}} g$.

g) Hva blir bevegelsesmengden $|\mathbf{p}_\pi|$ til pionet når et Δ^+ i ro henfaller? Regn med “naturlige enheter”, dvs. enheter der $\hbar = c = 1$.

Oppgitt: $m_\Delta = 1232$ MeV, $m_p = 939$ MeV, $m_\pi = 139$ MeV (i naturlige enheter).

Vi bruker konservering av firerimpuls, $p_\Delta = p_\pi + p_p$. I massesentersystemet har vi, siden $\mathbf{p}_p = -\mathbf{p}_\pi$,

$$m_\Delta^2 = p_\Delta^2 = p_\pi^2 + p_p^2 + 2p_\pi p_p = m_\pi^2 + m_p^2 + 2(E_p E_\pi + \mathbf{p}_\pi^2),$$

eller

$$(m_\Delta^2 - m_\pi^2 - m_p^2 - 2\mathbf{p}_\pi^2)^2 = 4(m_\pi^2 + \mathbf{p}_\pi^2)(m_p^2 + \mathbf{p}_\pi^2).$$

Dvs.

$$|\mathbf{p}_\pi| = \frac{1}{2m_\Delta} \sqrt{m_\Delta^4 + m_\pi^4 + m_p^4 - 2m_\Delta^2 m_p^2 - 2m_\Delta^2 m_\pi^2 - 2m_p^2 m_\pi^2} = 226.8 \text{ MeV}. \quad (4)$$

h) Det er eksperimentelt kjent at den totale vidden til Δ -resonansene er $\Gamma_\Delta = 120$ MeV. Bruk dette resultatet til å bestemme g_1 og g_2 . (Du kan anta at begge parametrene er reelle og positive.)

Oppgitt: For henfall til to partikler er sammenhengen mellom partiell henfallsrate Γ_{fi} og amplitude $\mathcal{M}_{fi}$ gitt som

$$\Gamma_{fi} = \frac{|\mathbf{p}_f|}{8\pi M_i^2} |\mathcal{M}_{fi}|^2, \quad (5)$$

der M_i er massen til den partikkelen (i ro) som henfaller, og $\mathbf{p}_f$ er bevegelsesmengden til en av partiklene i slutttilstanden.

Vi finner

$$\Gamma_\Delta = \Gamma_1 + \Gamma_2 = \frac{1}{8\pi} |\mathbf{p}_\pi| (g_1^2 + g_2^2) = \frac{1}{8\pi} |\mathbf{p}_\pi| g^2.$$

Dvs. at

$$g = \sqrt{8\pi \frac{\Gamma_\Delta}{|\mathbf{p}_\pi|}} = 3.65, \quad g_1 = \sqrt{\frac{2}{3}} g = 2.98, \quad g_2 = \sqrt{\frac{1}{3}} g = 2.11. \quad (6)$$

Oppgave 2. Nedbremsing av kosmiske protoner med veldig høy energi

I kosmisk stråling er det observert protoner med energi opptil 10^{20} eV. Det er samtidig kjent at protoner med *veldig* høy energi vil bli bremsset ned på grunn av kollisjoner med fotoner fra “3-graders strålingen” i universet. De viktigste prosessene for denne nedbremsingen er π -produksjon, spesielt prosessene

$$\gamma + p \rightarrow \Delta^+ \rightarrow \pi^0 + p \quad \text{og} \quad \gamma + p \rightarrow \Delta^+ \rightarrow \pi^+ + n. \quad (7)$$

der Δ^+ partikkelen er virtuell (dvs. representert ved sin propagator).

- a) Anta at “3-graders strålingen” består av fotoner γ med energi $\omega = 7 \times 10^{-4}$ eV og isotrop retningsfordeling.

Hvor stor må energien til et høyenergetisk proton være for at prosessen $\gamma + p \rightarrow \pi^0 + p$ skal være mulig?

I massesentersystemet må vi minst ha tilstrekkelig energi til å produsere et proton og et pion i ro. Dette kan uttrykkes på invariant form,

$$s = (p_\gamma + p_p)^2 = m_p^2 + 2p_\gamma p_p \geq (m_p + m_\pi)^2.$$

Det beste er at fotonet kolliderer “front mot front” med protonet, dvs. $p_\gamma = (\omega, 0, 0, -\omega)$, $p_p \approx (E_p, 0, 0, E_p)$, og

$$s \approx m_p^2 + (\omega + E_p)^2 - (\omega - E_p)^2 = m_p^2 + 4\omega E_p \geq m_p^2 + m_\pi(m_\pi + 2m_p).$$

Altså må

$$E_p \geq \frac{m_\pi(m_\pi + 2m_p)}{4\omega} = 1.0 \cdot 10^{20} \text{ eV}. \quad (8)$$

Kommentar: Merk at tilnærmingen $p_p \approx (E_p, 0, 0, E_p)$, som man kanskje ville tro er svært god når $E_p \approx 10^{11} m_p$, ikke må gjøres for tidlig! Hvis vi setter $p_p + p_\gamma \approx (E_p + \omega, 0, 0, E_p - \omega)$ fås

$$s \approx (E_p + \omega)^2 - (E_p - \omega)^2 = 4E_p\omega,$$

som avviker fra det riktige med leddet m_p^2 .

- b) Hvor stor må energien være for at prosessen $\gamma + p \rightarrow \Delta^+$ skal være mulig?

Vi finner ved tilsvarende regning som over at vi må ha

$$E_p \geq \frac{m_\Delta^2 - m_p^2}{4\omega} = 2.27 \cdot 10^{20} \text{ eV}. \quad (9)$$

Kommentar: På grunn av denne nedbremsingseffekten burde man observere svært få partikler med energi over ca. 10^{20} eV. Det interessante og litt mystiske er at dette ikke ser ut til å gjenspeile seg i observert kosmisk stråling!

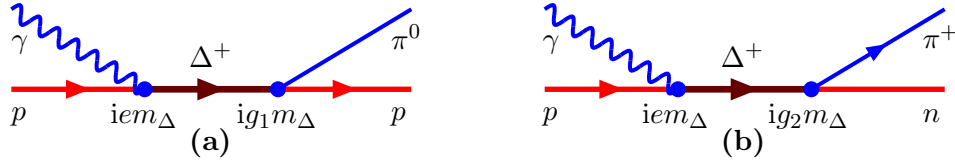
- c) Vi antar nå at Feynmanreglene for $\gamma p \Delta^+$ -knutepunktet og Δ^+ -propagatoren er som nedenfor



Her er e positronladningen, og m_Δ og Γ_Δ henholdsvis massen og vidden til Δ , som oppgitt i punkt 1g).

Tegn Feynmandiagrammene for prosessene (7).

Vi bruker overstående Feynmanreglene, og de fra oppgave 1f).



- d) Anta at protonet har en firervektor $p = E(1, 0, 0, 1)$ (energien er så stor at vi kan neglisjere protonets masse) og fotonet en firervektor $k = \omega(1, -\sin \vartheta, 0, -\cos \vartheta)$.

Skriv ned amplitudene $\mathcal{M}_{fi}$ for prosessene (7).

Vi får etter kansellering av i 'er (og når vi tar i betraktning at Feynmanreglene gir oss det algebraiske uttrykket for $-i\mathcal{M}_{fi}$).

$$\mathcal{M}_{fi}^{(a)} = \frac{eg_1 m_\Delta^2}{q^2 - (m_\Delta + i\Gamma_\Delta)^2}, \quad \mathcal{M}_{fi}^{(b)} = \frac{eg_2 m_\Delta^2}{q^2 - (m_\Delta + i\Gamma_\Delta)^2}, \quad (10)$$

der

$$\begin{aligned} q^2 &= (p_p + p_\gamma)^2 = p_p^2 + p_\gamma^2 + 2p_p p_\gamma = m_p^2 + 2p_p p_\gamma = m_p^2 + 2\omega E_p + 2\omega E_p \cos \vartheta \\ &= m_p^2 + 4\omega E_p \cos^2 \vartheta / 2. \end{aligned}$$

- e) For å beregne tverrsnittene til disse prosessene er det best å gå til massesentersystemet. Skisser hvordan du vil gå fram for å finne energiene ω^c og E^c til henholdsvis foton og proton i massesentersystemet (når ω , E , og $\cos \vartheta$ er kjent).

I massesentersystemet må vi ha

$$p_\gamma^c = (\omega^c, 0, 0, -\omega^c), \quad p_p^c = (E^c, 0, 0, \omega^c), \quad \text{med } E^c = \sqrt{\omega^{c2} + m_p^2}.$$

Dette gir oss to uttrykk for den Lorentz invariante størrelsen q^2

$$q^2 = m_p^2 + 4\omega E_p \cos^2 \vartheta / 2 = \left(\omega^c + \sqrt{\omega^{c2} + m_p^2} \right)^2, \quad (11)$$

som kan løses med hensyn på ω^c .

Kommentar: Denne løsningen blir

$$\omega^{c2} = \frac{(q^2 - m_p^2)^2}{4q^2} = \frac{4\omega^2 E_p^2 \cos^4 \vartheta / 2}{m_p^2 + 4\omega E_p \cos^2 \vartheta / 2},$$

men husk at dette er utledet under forutsetning om at $E_p \gg m_p$.

Oppgave 3.

Den normerte spinn-flavor bølgefunksjonen for Δ^{++} med spinn $S_z = \frac{3}{2}$ er gitt som

$$|\Delta^{++} \frac{3}{2}\rangle = |u \uparrow\rangle |u \uparrow\rangle |u \uparrow\rangle. \quad (12)$$

- a) Finn den normerte spinn-flavor bølgefunksjonen for Δ^+ med spinn $S_z = \frac{3}{2}$.

Vi anvender isospinn stigeoperatoren $I^- = I_1^- + I_2^- + I_3^-$ på ligning (12), og normerer for hånd. Dette gir

$$|\Delta^+ \frac{3}{2}\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}} (|d \uparrow\rangle |u \uparrow\rangle |u \uparrow\rangle + |u \uparrow\rangle |d \uparrow\rangle |u \uparrow\rangle + |u \uparrow\rangle |u \uparrow\rangle |d \uparrow\rangle). \quad (13)$$

- b) Finn den normerte spinn-flavor bølgefunksjonen for Δ^+ med spinn $S_z = \frac{1}{2}$.

Vi anvender spinn stigeoperatoren $S^- = S_1^- + S_2^- + S_3^-$ på ligning (13), og normerer for hånd. Dette gir

$$\begin{aligned} |\Delta^+ \frac{1}{2}\rangle &= \frac{1}{3} (|d \downarrow\rangle |u \uparrow\rangle |u \uparrow\rangle + |d \uparrow\rangle |u \downarrow\rangle |u \uparrow\rangle + |d \uparrow\rangle |u \uparrow\rangle |u \downarrow\rangle) \\ &+ \frac{1}{3} (|u \downarrow\rangle |d \uparrow\rangle |u \uparrow\rangle + |u \uparrow\rangle |d \downarrow\rangle |u \uparrow\rangle + |u \uparrow\rangle |d \uparrow\rangle |u \downarrow\rangle) \\ &+ \frac{1}{3} (|u \downarrow\rangle |u \uparrow\rangle |d \uparrow\rangle + |u \uparrow\rangle |u \downarrow\rangle |d \uparrow\rangle + |u \uparrow\rangle |u \uparrow\rangle |d \downarrow\rangle). \end{aligned} \quad (14)$$

- c) Det magnetiske momentet til et baryon med spinn-flavor bølgefunksjon $|\Psi\rangle$ er definert som

$$\mu_z = \langle \Psi | \sum_i \frac{e Q_i}{2m_i} S_{iz} | \Psi \rangle, \quad (15)$$

der summen er over de tre posisjonene i bølgefunksjonen. (Merk at Q_i , m_i og S_{iz} er *operatorer* som tar forskjellige verdier avhengig av hvilke tilstander de virker på.)

Finn det magnetiske momentet til Δ^{++} med spinn $S_z = \frac{3}{2}$. Angi svaret i enheter av kjernemagnetonen, $\mu_{\text{km}} = \frac{e}{2m_p}$.

Oppgitt: Du kan anta at $m_u = m_d = 336 \text{ MeV}$.

$$\mu_z = \left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \right) \left(\frac{e}{2m_u} \right) = \left(\frac{m_p}{m_u} \right) \left(\frac{e}{2m_p} \right) = 2.795 \mu_{\text{km}}. \quad (16)$$

- d) Finn det magnetiske momentet til Δ^+ med spinn $S_z = \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} \mu_z &= \frac{1}{9} \left[\left(-\frac{1}{3} \times -\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \right) \times 3 + \left(-\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \times -\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \right) \times 6 \right] \left(\frac{e}{2m_u} \right) \\ &= \frac{1}{6} \left(\frac{m_p}{m_u} \right) \left(\frac{e}{2m_p} \right) = 0.466 \mu_{\text{km}}. \end{aligned} \quad (17)$$

Tips til punkt a–b): Bruk stigeoperatorene.

35. CLEBSCH-GORDAN COEFFICIENTS, SPHERICAL HARMONICS, AND d FUNCTIONS

Note: A square-root sign is to be understood over every coefficient, e.g., for $-8/15$ read $-\sqrt{8/15}$.

Notation:

$1/2 \times 1/2$
 $Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta$
 $2 \times 1/2$
 $Y_1^1 = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{i\phi}$
 $Y_2^0 = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right)$
 $Y_2^1 = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{i\phi}$
 $Y_2^2 = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2 \theta e^{2i\phi}$

$1 \times 1/2$
 $Y_\ell^{-m} = (-1)^m Y_\ell^{m*}$
 $d_{m,0}^\ell = \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}} Y_\ell^m e^{-im\phi}$

$d_{m',m}^j = (-1)^{m-m'} d_{m,m'}^j = d_{-m,-m'}^j$

$3/2 \times 3/2$
 $d_{0,0}^1 = \cos \theta$
 $d_{1/2,1/2}^1 = \cos \frac{\theta}{2}$
 $d_{1,1}^1 = \frac{1 + \cos \theta}{2}$
 $d_{1/2,-1/2}^1 = -\sin \frac{\theta}{2}$
 $d_{1,0}^1 = -\frac{\sin \theta}{\sqrt{2}}$
 $d_{1,-1}^1 = \frac{1 - \cos \theta}{2}$

$2 \times 3/2$
 $d_{3/2,3/2}^2 = \frac{1 + \cos \theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$
 $d_{3/2,1/2}^2 = -\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1 + \cos \theta}{2} \sin \frac{\theta}{2}$
 $d_{3/2,-1/2}^2 = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1 - \cos \theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$
 $d_{3/2,-3/2}^2 = -\frac{1 - \cos \theta}{2} \sin \frac{\theta}{2}$
 $d_{1/2,1/2}^2 = \frac{3 \cos \theta - 1}{2} \cos \frac{\theta}{2}$
 $d_{1/2,-1/2}^2 = -\frac{3 \cos \theta + 1}{2} \sin \frac{\theta}{2}$
 $d_{1,1}^2 = \frac{1 + \cos \theta}{2} (2 \cos \theta - 1)$
 $d_{1,0}^2 = -\sqrt{\frac{3}{2}} \sin \theta \cos \theta$
 $d_{1,-1}^2 = \frac{1 - \cos \theta}{2} (2 \cos \theta + 1)$
 $d_{0,0}^2 = \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right)$

2×2
 $d_{2,2}^2 = \left(\frac{1 + \cos \theta}{2} \right)^2$
 $d_{2,1}^2 = -\frac{1 + \cos \theta}{2} \sin \theta$
 $d_{2,0}^2 = \frac{\sqrt{6}}{4} \sin^2 \theta$
 $d_{2,-1}^2 = -\frac{1 - \cos \theta}{2} \sin \theta$
 $d_{2,-2}^2 = \left(\frac{1 - \cos \theta}{2} \right)^2$

$(j_1 j_2 m_1 m_2 | j_1 j_2 J M)$
 $= (-1)^{J-j_1-j_2} (j_2 j_1 m_2 m_1 | j_2 j_1 J M)$

Figure 35.1: The sign convention is that of Wigner (*Group Theory*, Academic Press, New York, 1959), also used by Condon and Shortley (*The Theory of Atomic Spectra*, Cambridge Univ. Press, New York, 1953), Rose (*Elementary Theory of Angular Momentum*, Wiley, New York, 1957), and Cohen (*Tables of the Clebsch-Gordan Coefficients*, North American Rockwell Science Center, Thousand Oaks, Calif., 1974). The coefficients here have been calculated using computer programs written independently by Cohen and at LBNL.