

**Løsningsforslag til eksamen i
FY3403 PARTIKKELFYSIKK**
Lørdag 10. juni 2006

Dette løsningsforslaget er på 4 sider.

Oppgave 1. Kvarmodell for $q\bar{q}$ -mesoner

Gi en beskrivelse av hvordan man i kvarmodellen tenker seg at mesoner er bygd opp av en u eller d kvark og en $\bar{u}$ eller $\bar{d}$ antikvark. Prøv spesielt å forklare

- a) hvilket spinn S det kombinerte $q\bar{q}$ -systemet kan ha,
- b) hvilket isospinn I det kombinerte $q\bar{q}$ -systemet kan ha,
- c) hvilken relativ banedreieimpuls L det kombinerte $q\bar{q}$ -systemet kan ha,
- d) hvilken total dreieimpuls J det kombinerte $q\bar{q}$ -systemet kan ha,
- e) hvilken spektroskopisk notasjon man bruker for å betegne $q\bar{q}$ -systemer som over,
- f) kvalitativt hvordan massen til mesonet avhenger av de forskjellige kvantetallene (illustrer helst med et diagram),
- g) hvordan pariteten P til mesonet avhenger av de forskjellige kvantetallene,
- h) hvordan C -pariteten til de nøytrale mesonene avhenger av de forskjellige kvantetallene,
- i) hvordan G -pariteten til mesonet avhenger av de forskjellige kvantetallene,
- j) hvilke mer kvantitative matematiske modeller man kan bruke for å beregne massen (og andre fysiske egenskaper) til mesonet.

Oppgave 2. Henfall av mesoner lagd av lette (anti-)kvarker, dvs. $u, \bar{u}, d, \bar{d}$

Ifølge *Review of Particle Physics* har ρ -mesonene (3S_1 -tilstander med $I = 1$) masse $m = 771 \text{ MeV}/c^2$ og vidde $\Gamma = 149 \text{ MeV}/c^2$, mens de tilsvarende ω -mesonene (3S_1 -tilstander med $I = 0$) masse $m = 782 \text{ MeV}/c^2$ og vidde $\Gamma = 8.44 \text{ MeV}/c^2$.

- a) Hvorfor er ω -mesonene så mye mer stabile enn ρ -mesonene?

I *Review of Particle Physics* finner vi a_2 -mesonene (3P_2 -tilstander med $I = 1$) listet med masse $m = 1318 \text{ MeV}/c^2$ og vidde $\Gamma = 107 \text{ MeV}/c^2$.

- b) Forklar hvorfor henfallsmoden $a_2 \rightarrow \pi\pi$ ikke er observert

c) Forklar hvorfor henfallsmoden $a_2 \rightarrow \pi\pi\pi$ ikke er observert

Oppgitt: Ifølge *Review of Particle Physics* finner vi følgende kvantetall tilordnet endel mesoner:

$$\begin{array}{ll} \pi^0(135) & I^G(J^{PC}) = 1^-(0^{-+}) \\ \pi^\pm(140) & I^G(J^{PC}) = 1^-(0^{-}) \\ \eta(547) & I^G(J^{PC}) = 0^+(0^{-+}) \\ \rho(770) & I^G(J^{PC}) = 1^+(1^{--}) \\ \omega(782) & I^G(J^{PC}) = 0^-(1^{--}) \\ a_2(1318) & I^G(J^{PC}) = 1^-(2^{++}) \end{array}$$

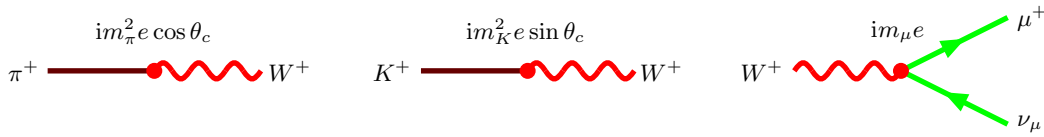
Vi har følgende sammenhenger: $P = (-1)^{L+1}$, $C = (-1)^{L+S}$, $G = (-1)^I C$.

Oppgave 3. Kvantitativ modell for henfall av pseudoskalare mesoner

Som en sterkt forenklet (og derfor unøyaktig) modell for henfall av ladete π -mesoner og K -mesoner, f.eks

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu, \quad K^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu,$$

antar vi at disse mesonene kan konvertere til et virtuelt W^+ vektormeson, som igjen kan konvertere til $\mu^+ + \nu_\mu$ som indikert av Feynmanreglene nedenfor.

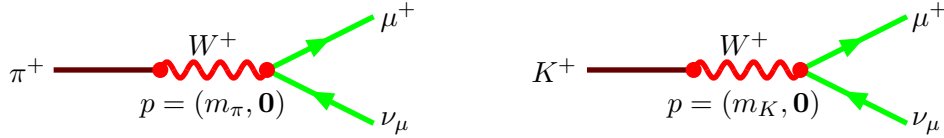


Propagatoren for et virtuelt W -vektormeson med firerimpuls p settes til

$$\text{red wavy line} \quad \frac{i}{p^2 - m_W^2}$$

I naturlige enheter har vi $m_\mu \approx 105.7$ MeV, $m_\pi \approx 140$ MeV, $m_K \approx 495$ MeV, $m_W \approx 80.4$ GeV, $\alpha = e^2/4\pi \approx 1/137.04$.

a) Tegn Feynman diagrammene for henfallsprosessene $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$ og $K^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$.



b) Skriv ned de tilhørende algebraiske uttrykk for henfallsamplitudene $\mathcal{M}_{\text{fi}}$ i de to tilfellene.

$$\mathcal{M}_{\text{fi}}(\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu) = -i \frac{e^2 m_\pi^2 m_\mu \cos \theta_c}{m_\pi^2 - m_W^2} \approx i e^2 \cos \theta_c \frac{m_\pi^2 m_\mu}{m_W^2} \quad (1)$$

$$\mathcal{M}_{\text{fi}}(K^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu) = -i \frac{e^2 m_K^2 m_\mu \sin \theta_c}{m_K^2 - m_W^2} \approx i e^2 \sin \theta_c \frac{m_K^2 m_\mu}{m_W^2} \quad (2)$$

c) Anta at mesonet er i ro før henfallet. Hva blir energien E_μ til myonet i de to tilfellene?

La m_m bety enten m_π eller m_K . Vi bruker naturlige enheter. Vi må ha $E_\mu + E_\nu = m_m$. Siden $|\mathbf{p}_\mu| = |\mathbf{p}_\nu|$ og $m_\nu = 0$ finner vi at $E_\nu = \sqrt{E_\mu^2 - m_\mu^2}$. Altså at $\sqrt{E_\mu^2 - m_\mu^2} = m_m - E_\mu$. Kvadrert, og løst ut for E_μ gir dette

$$E_\mu = \frac{m_m^2 + m_\mu^2}{2m_m} = \begin{cases} 109.9 \text{ MeV} & \text{når m er } \pi^+, \\ 258.8 \text{ MeV} & \text{når m er } K^+. \end{cases} \quad (3)$$

d) Det er eksperimentelt kjent at

$$\frac{\Gamma(K^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu)}{\Gamma(\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu)} \approx \frac{4}{3}. \quad (4)$$

Velg θ_c slik at denne relasjonen er oppfylt.

Her trenger vi bevegelsesmengden til myonet etter henfall av partikkel m. Fra ligning (3) finner vi at

$$|\mathbf{p}_m| = \sqrt{E_\mu^2 - m_\mu^2} = \frac{1}{2m_m} \sqrt{(m_m^2 + m_\mu^2)^2 - 4m_m^2 m_\mu^2} = \frac{m_m^2 - m_\mu^2}{2m_m} \quad (5)$$

Fra dette følger det at

$$\frac{\Gamma(K^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu)}{\Gamma(\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu)} = \frac{m_\pi^2}{m_K^2} \frac{(m_K^2 - m_\mu^2)/m_K}{(m_\pi^2 - m_\mu^2)/m_\pi} \frac{m_K^4 \sin^2 \theta_c}{m_\pi^4 \cos^2 \theta_c},$$

dvs. at vi må ha

$$\tan^2 \theta_c = \frac{4}{3} \frac{m_\pi}{m_K} \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{m_K^2 - m_\mu^2} = 0.0136,$$

eller

$$\theta_c = 0.116 \equiv 6.7^\circ. \quad (6)$$

Kommentar: Den eksperimentelle verdien på Cabibbo-vinkelen er $\theta_C = 0.229 = 13.1^\circ$.

e) Hva blir da henfallsratene, $\Gamma(\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu)$ og $\Gamma(K^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu)$?

Ved innsetting av tallverdier finner man

$$\begin{aligned} \Gamma(\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu) &= e^4 \cos^2 \theta_c \frac{m_\pi^4 m_\mu^2}{m_W^2} \frac{1}{8\pi m_\pi^2} \left(\frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2m_\pi} \right) \\ &= \pi \alpha^2 \cos^2 \theta_c \frac{m_\pi m_\mu^2 (m_\pi^2 - m_\mu^2)}{m_W^4} \\ &= 3.71 \cdot 10^{-16} m_\pi = 5.21 \cdot 10^{-14} \text{ MeV}, \end{aligned} \quad (7)$$

og

$$\begin{aligned} \Gamma(K^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu) &= e^4 \sin^2 \theta_c \frac{m_K^4 m_\mu^2}{m_W^2} \frac{1}{8\pi m_K^2} \left(\frac{m_K^2 - m_\mu^2}{2m_K} \right) \\ &= \pi \alpha^2 \sin^2 \theta_c \frac{m_K m_\mu^2 (m_K^2 - m_\mu^2)}{m_W^4} \\ &= 1.40 \cdot 10^{-16} m_K = 6.94 \cdot 10^{-14} \text{ MeV}. \end{aligned} \quad (8)$$

- f) Bestem levetidene τ_π og τ_K til henholdsvis π^+ og K^+ i denne modellen, under antagelse om at de oppgitte henfallsmodene er de eneste som forekommer. Oppgi svaret i SI-enheter, dvs. sekunder. (Hvis du ikke har fått til forrige punkt, forklar med eksempel hvordan du konverterer fra en henfallsrate Γ gitt i naturlige enheter til en levetid τ gitt i sekunder.)

$$\tau_\pi = \frac{\hbar}{\Gamma_\pi} = 1.26 \cdot 10^{-8} \text{ s} \quad (9)$$

$$\tau_K = \frac{\hbar}{\Gamma_K} = 0.95 \cdot 10^{-8} \text{ s} \quad (10)$$

Kommentar: De eksperimentelle levetidene er $\tau_\pi = 2.60 \cdot 10^{-8} \text{ s}$, og $\tau_K = 1.24 \cdot 10^{-8} \text{ s}$, så denne *grovt tiløksede* modellen fungerer egentlig mye bedre enn den fortjener!

- g) Forklar hvordan du vil generalisere denne modellen til å beskrive henfall av D_s^+ -mesoner, dvs. $D_s^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$.

Oppgitt:

- a) Sammenhengen mellom amplitude $\mathcal{M}_{\text{fi}}$ og henfallsrate er i dette tilfellet (med to partikler i slutttilstanden), i naturlige enheter,

$$\Gamma = \frac{|\mathbf{p}|}{8\pi m^2} |\mathcal{M}_{\text{fi}}|^2, \quad (11)$$

der m er massen til partikkelen (i ro) som henfaller, og $|\mathbf{p}|$ er bevegelsesmengden til en av partiklene i slutttilstanden.

- b) $\hbar = 1.0546 \times 10^{-34} \text{ Js} = 6.5822 \times 10^{-22} \text{ MeVs}$, $c = 2.9979 \times 10^8 \text{ m/s}$.