NTNU **Institutt for fysikk**

Faglig kontakt under eksamen:
Professor Kåre Olaussen
Telefon: 45 43 71 70

Eksamen i FY3452 GRAVITASJON OG KOSMOLOGI

Onsdag 17. august 2011
09:00–13:00

Tillatte hjelpemidler: Alternativ **C**
Standard kalkulator (ifølge NTNU's liste).
K. Rottman: *Matematisk formelsamling* (alle språkutgaver).
Barnett & Cronin: *Mathematical Formulae*
Dette oppgavesettet er på 2 sider.

Oppgave 1. Bevegelse av en punktpartikkel i Schwarzschild-geometrien
I generell relativitetsteori er geometrien rundt en punktmasse M beskrevet av Schwarzschild metrikken, i kulekoodinater definert ved linje-elementet

$$\mathrm{d}s^2 = -\left(1-\frac{r_M}{r}\right) c^2 \mathrm{d}t^2 + \left(1-\frac{r_M}{r}\right)^{-1} \mathrm{d}r^2 + r^2\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\phi^2\right). \tag{1}$$

a) Skriv ned Lagrangefunksjonen for en punktpartikkel som beveger seg i denne geometrien. Du kan parametrisere partikkelens bane i tidrommet ved dens egentid τ, dvs. ved kurven $x^\mu(\tau)$.

b) Utled Euler-Lagrange ligningene for $\left(x^0, x^1, x^2, x^3\right) = (t, r, \theta, \phi)$. Du trenger foreløbig ikke løse disse ligningene.

c) Vis at $\theta = \frac{\pi}{2}$ er en konsistent løsning av Euler-Lagrange ligningen for θ. (Du må vise at antagelsene $\theta = \frac{\pi}{2}$ og $\dot\theta \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\theta = 0$ impliserer at $\ddot\theta = 0$).

Anta at $\theta = \frac{\pi}{2}$ i de neste punktene.

d) Vis at $\dot t$ kan elimineres fra Euler-Lagrange ligningene dine, dvs. uttrykkes som en funksjon av $r(\tau)$.

e) Vis at $\dot\phi$ kan elimineres fra Euler-Lagrange ligningene dine, dvs. uttrykkes som en funksjon av $r(\tau)$.

f) Metrikken definert av ligning (1) avhenger ikke eksplisitt av tiden t, dvs. at virkningen utledet fra den er invariant under tids-translasjoner, $t \to t + t_0$. Bruk Nöther's teorem til å utlede en konserveringslov fra denne invariansen.

g) Metrikken definert av ligning (1) avhenger ikke eksplisitt av vinkelen ϕ, dvs. at virkningen utledet fra den er invariant under rotasjoner om z-aksen, $\phi \to \phi + \phi_0$. Bruk Nöther's teorem til å utlede en konserveringslov fra denne invariansen.

h) Metrikken definert av ligning (1) avhenger ikke eksplisitt av egentiden τ, dvs. at virkningen utledet fra den er invariant under egentids-translasjoner, $\tau \to \tau + \tau_0$. Bruk Nöther's teorem til å utlede en konserveringslov fra denne invariansen.

i) Vis, ved bruk av overstående resultater (eller på annet vis), at bevegelsen i Schwarzschild-geometrien kan reduseres til en første ordens differensialligning for $r(\tau)$, på formen

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 + V(r) = E, \tag{2}$$

der E er en konstant, finn det eksplisitte uttrykket for $V(r)$ (som kan avhenge av de konserverte størrelsene du har funnet over).

Oppgave 2. Schwarzschild-geometrien i kartesiske koordinater
I enkelte sammenhenger kan det være ønskelig å beskrive geometrien rundt en punktmasse M i bevegelse. For dette kan det være gunstig å bruke kartesiske koordinater, (x, y, z).

a) Finn elementet $\mathrm{d}r^2$ uttrykt ved $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$ og $\mathrm{d}z$, og eventuelt funksjoner av x, y og z.

b) Finn elementet $r^2\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\phi^2\right)$ uttrykt ved $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$ og $\mathrm{d}z$, og eventuelt funksjoner av x, y og z.

c) Skriv ned linje-elementet (1) uttrykt ved $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$ og $\mathrm{d}z$, og eventuelt funksjoner av x, y og z.

Oppgave 3. Lorentz transformasjon av firer-skalar og firer-vektor
En Lorentz-transformasjon langs z-aksen har formen

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\eta & 0 & 0 & \sinh\eta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh\eta & 0 & 0 & \cosh\eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{3}$$

a) I hvilken retning og med hvilken fart v beveges origo i det gamle koordinatsystemet,

$$\boldsymbol{r} \equiv (x, y, z) = (0, 0, 0),$$

sett fra det nye?

b) En (firer-)skalar størrelse $\varphi(x)$ har formen

$$\varphi(\boldsymbol{r}, t) = \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \tag{4}$$

i det gamle koordinatsystemet.

Hvordan beskrives denne størrelsen i det nye koordinatsystemet?

c) En (firer-)vektor størrelse $J^\mu(x)$ har formen

$$J^\mu(\boldsymbol{r}, t) = \left(\frac{1}{r}, 0, 0, 0\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, 0, 0, 0\right) \tag{5}$$

i det gamle koordinatsystemet.

Hvordan beskrives denne størrelsen i det nye koordinatsystemet?

Some expressions which *may* be of use

Covariant and contravariant transformation laws

Under a coordinate transformation, $x^\mu = x^\mu(x')$, the covariant (lower) indices of a tensor transform like the partial derivative, while the contravariant (upper) indices transforms like the line element,

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu}\right) \frac{\partial}{\partial x'^\alpha}, \qquad \mathrm{d}x^\mu = \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha}\right) \mathrm{d}x'^\alpha. \tag{6}$$

Examples:

$$g_{\mu\nu}(x) = \left(\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu}\right) \left(\frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\nu}\right) g'_{\alpha\beta}(x'), \qquad T^{\mu\nu} = \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha}\right) \left(\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta}\right) T'^{\alpha\beta}. \tag{7}$$

Lorentz transformations

Lorentz transformations can be viewed as a special class of coordinate transformation, linear and homogeneous, $x^\mu = \Lambda^\mu{}_\alpha \, x'^\alpha$, preserving the Minkowski metric: $\Lambda^\mu{}_\alpha \, \Lambda^\nu{}_\beta \, \eta_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1)$. For a boost in the z-direction the matrix Λ is explicitly

$$\Lambda^\mu{}_\alpha = \begin{pmatrix} \cosh\eta & 0 & 0 & \sinh\eta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh\eta & 0 & 0 & \cosh\eta \end{pmatrix}. \tag{8}$$

This transformation is such that the origin of the old (primed) coordinate system is moving with a velocity $V = c \tanh\eta$ in the z-direction, when viewed from the new coordinate system.

Electromagnetic relations

The electromagnetic field tensor $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ is related to the electric field $\boldsymbol{E}$ and magnetic field $\boldsymbol{B}$ by

$$\begin{aligned} &F^{0i} = -F^{i0} = E^i \quad \text{for } i = x, y, z, \\ &F^{12} = -F^{21} = B^z, \qquad F^{23} = -F^{32} = B^x, \qquad F^{31} = -F^{13} = B^y. \end{aligned} \tag{9}$$

In terms of a four-potential $A^\mu = \left(A^0, \boldsymbol{A}\right)$ we have $\boldsymbol{E} = -\left(\boldsymbol{\nabla} A^0 + \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right)$ and $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}$.

Euler-Lagrange equations

The Euler-Lagrange equations for a field theory described by the Lagrangian $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi_a, \partial_\mu \varphi_a, x)$ are

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_a)}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_a}. \tag{10}$$

The corresponding equations for point particle mechanics is obtained by restricting ∂_μ to only a time derivative $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$.

Nöther's theorem

Assume the action is invariant under the continuous transformations $\varphi_a \to \varphi_a + \varepsilon\, \delta\varphi_a + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$, more precisely that $\mathcal{L} \to \mathcal{L} + \varepsilon\, \partial_\mu \Lambda^\mu + \mathcal{O}(\epsilon^2)$ under this transformation. Then there is an associated conserved current,

$$J^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_a)} \delta\varphi_a - \Lambda^\mu. \tag{11}$$

I.e., $\partial_\mu J^\mu = 0$. The corresponding expression for point particle mechanics is obtained by restricting ∂_μ to only a time derivative $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$.