



Faglig kontakt under eksamen:
Professor Kåre Olaussen
Telefon: 45 43 71 70

Eksamen i FY3452 GRAVITASJON OG KOSMOLOGI

Lørdag 19. mai 2012
09:00–13:00

Tillatte hjelpemidler: Alternativ C

Standard kalkulator (ifølge NTNU's liste).

K. Rottman: *Matematisk formelsamling* (alle språkutgaver).

Barnett & Cronin: *Mathematical Formulae*

There is also an english version of this exam set.

Dette oppgavesettet er på 2 sider.

Oppgave 1. Bevegelse i et ekspanderende univers

Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker metrikken kan for $k = 0$ uttrykkes ved linje-elementet

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 (dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (1)$$

når vi bruker enheter der lyshastigheten $c = 1$. Geodetisk bevegelse kan generelt utledes fra Lagrangefunksjonen

$$L = -\frac{1}{2} g_{\mu\nu}(x) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu. \quad (2)$$

der startbetingelsene må oppfylle betingelsen $g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 1$ for massive partikler, og $g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0$ for masseløse partikler (lys). Her betyr $\dot{}$ derivasjon med hensyn til egentid τ .

- Hvilke antagelser ligger bak utledningen av linje-elementet (1), og det mer generelle linje-elementet der $k \neq 0$?
- Finn Euler-Lagrange ligningene for bevegelse i Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker-geometrien når $k = 0$.
- De geodetiske ligningene kan generelt skrives på formen

$$\ddot{x}^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} \dot{x}^\nu \dot{x}^\lambda = 0. \quad (3)$$

Bruk resultatene fra forrige punkt til å finne konneksjonskoeffisientene $\Gamma^\mu_{\nu\lambda}$.

- Lagrange-funksjonen er i dette tilfellet invariant under transformasjonen $x^i \rightarrow x^i + \epsilon$ for $x^i = x, y, z$. Bruk Nöthers teorem til å finne de tilhørende konserverte størrelsene. Vis at resultatet er konsistent med de geodetiske ligningene du har funnet.
- Lagrange-funksjonen er invariant under transformasjonen $\tau \rightarrow \tau + \epsilon$. Hva er den tilhørende konserverte størrelsen (som kan utledes ved bruk av Nöthers teorem)?
- Bruk resultatene over til å finne $\frac{dx^i}{dt}$ uttrykt ved startverdien ved $t = t_0$, og funksjonen a .

Oppgave 2. Friedmann-ligningene med konsekvenser

Friedmann's to ligninger for universets dynamikk kan (i enheter der $c = 1$) formuleres som

$$G_0^0 = \left(\frac{a'}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi}{3} G_N \varepsilon, \quad (4)$$

$$-G_1^1 = \left(\frac{a'}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} + \frac{2a''}{a} = 8\pi G_N p, \quad (5)$$

der $'$ betyr derivasjon med hensyn på kosmisk tid t , og G_N er Newtons konstant. Vi har antatt en energy-impuls tensor av formen

$$T^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p \end{pmatrix}. \quad (6)$$

- a) Konsistens av Einstein-ligningene $G^\mu{}_\nu = 8\pi G_N T^\mu{}_\nu$ setter generelt en betingelse på energi-impuls tensoren $T^\mu{}_\nu$. Hvilken betingelse er det?
- b) I denne oppgaven skal du utlede denne betingelsen ved direkte manipulasjon av ligningene (4) og (5): Deriver ligning (4) med hensyn på t , og bruk deretter ligning (4) og (5) til å eliminere alle ledd som involverer $\frac{a''}{a}$ og $\frac{k}{a^2}$ fra resultatet.
- c) Vis at uttrykket fra forrige punkt kan skrives på formen

$$\frac{d}{dt} \varepsilon a^3 + p \frac{d}{dt} a^3 = 0. \quad (7)$$

Hva er den fysiske tolkningen av denne ligningen?

- d) Anta tilstandsligningen $p = w\varepsilon$, der w er en konstant. Vis at ligning (7) da kan brukes til å finne en sammenheng mellom $\varepsilon(t)/\varepsilon(t_0)$ og $a(t)/a(t_0)$. Gi denne sammenhengen.
- e) Bruk sammenhengen du fant i forrige punkt til å erstatte høyresiden av ligning (4), slik at du får en ligning der $a(t)$ er den eneste tidsavhengige størrelsen som inngår.
- f) Sett tilslutt $k = 0$ og finn den eksplisitte løsningen av ligningen du fant i forrige punkt. Se spesielt på tilfellene $w = \frac{1}{3}$, $w = 0$, og $w = -1$.

Oppgave 3. Noen astronomiske fakta

- a) Hva er avstanden fra jorda til sola?
- b) Hva er jordas hastighet rundt sola?
- c) Hva er avstanden fra Jupiter til sola?
- d) Hva er solas radius?
- e) Hvor er massesenteret til solsystemet?
- f) Hva er den *astronomiske enheten* (a.u.)?
- g) Hvor langt er et *lysår*?
- h) Hvor langt er et *parsec*?
- i) Hva er avstanden til vår nærmeste (nest etter sola) stjerne?
- j) Hva er avstanden fra sola til sentrum av vår galakse?
- k) Hva er størrelsen på vår galakse?
- l) Hva er avstanden til vår nærmeste spiralgalakse?
- m) Hva er universets alder?

Some expressions which *may* be of use

Euler-Lagrange equations

The Euler-Lagrange equations for a field theory described by the Lagrangian $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi_a, \partial_\mu \varphi_a, x)$ are

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_a)} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_a}. \quad (8)$$

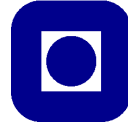
The corresponding equations for point particle mechanics is obtained by restricting ∂_μ to only a time derivative d/dt .

Nöther's theorem

Assume the action is invariant under the continuous transformations $\varphi_a \rightarrow \varphi_a + \varepsilon \delta \varphi_a + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$, more precisely that $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + \varepsilon \partial_\mu \Lambda^\mu + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$ under this transformation. Then there is an associated conserved current,

$$J^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_a)} \delta \varphi_a - \Lambda^\mu. \quad (9)$$

I.e., $\partial_\mu J^\mu = 0$. The corresponding expression for point particle mechanics is obtained by restricting ∂_μ to only a time derivative d/dt .



Contact during the exam:
Professor Kåre Olaussen
Telephone: 45 43 71 70

Exam in FY3452 GRAVITATION AND COSMOLOGY

Saturday May 19, 2012
09:00–13:00

Allowed help: Alternativ C

Standard calculator (according to list by NTNU).

K. Rottman: *Matematisk formelsamling* (all language editions).

Barnett & Cronin: *Mathematical Formulae*

Det finnes også en norsk versjon av dette eksamenssettet.

This problemset consists of 3 pages.

Problem 1. Motion in an expanding universe

The Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker metric can for $k = 0$ be expressed by the line element

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 (dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (1)$$

when we use units where the speed of light $c = 1$. Geodesic motion can in general be derived from the Lagrange function

$$L = -\frac{1}{2} g_{\mu\nu}(x) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu. \quad (2)$$

where the initial conditions must satisfy the condition $g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 1$ for massive particles, and $g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0$ for massless particles (light). Here $\dot{}$ means differentiation with respect to egentime τ .

- Which assumptions are behind the derivation of the line element (1), and the more general line element where $k \neq 0$?
- Find the Euler-Lagrange equations for motion in the Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker geometry when $k = 0$.
- The geodesic equation can in general be written in the form

$$\ddot{x}^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} \dot{x}^\nu \dot{x}^\lambda = 0. \quad (3)$$

Use the results of the previous point to find the connection coefficients $\Gamma^\mu_{\nu\lambda}$.

- The Lagrange function is in this case invariant under the transformation $x^i \rightarrow x^i + \epsilon$ for $x^i = x, y, z$. Use the Nöther theorem to find the corresponding conserved quantities. Show that the result is consistent with the geodesic equations you have found.
- The Lagrange function is invariant under the transformation $\tau \rightarrow \tau + \epsilon$. What is the corresponding conserved quantity (which can be derived by use of the Nöther theorem)?
- Use the results above to find $\frac{dx^i}{dt}$ expressed by the starting values at $t = t_0$, and the function a .

Problem 2. The Friedmann equations and consequences

The two Friedmann equations describing the dynamics of the universe can (in units where $c = 1$) be formulated as

$$G_0^0 = \left(\frac{a'}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi}{3} G_N \varepsilon, \quad (4)$$

$$-G_1^1 = \left(\frac{a'}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} + \frac{2a''}{a} = 8\pi G_N p, \quad (5)$$

where $'$ means differentiation with respect to cosmic time t , and G_N is Newton's constant. We have assumed an energy-momentum tensor of the form

$$T^\mu_\nu = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p \end{pmatrix}. \quad (6)$$

- a) Consistency of the Einstein equations $G^\mu_\nu = 8\pi G_N T^\mu_\nu$ in general impose a condition on the energy momentum tensor T^μ_ν . Which condition is it?
- b) In this problem you shall derive the condition by direct manipulation of equations (4) and (5): Differentiate equation (4) with respect to t , and next use equations (4) and (5) to eliminate all terms which involve $\frac{a''}{a}$ and $\frac{k}{a^2}$ from the result.
- c) Show that the expression from the previous point can be written on the form

$$\frac{d}{dt} \varepsilon a^3 + p \frac{d}{dt} a^3 = 0. \quad (7)$$

What is the physical interpretation of this equation?

- d) Assume the equation of state $p = w\varepsilon$, where w is a constant. Show that we then may use (7) to find a connection between $\varepsilon(t)/\varepsilon(t_0)$ and $a(t)/a(t_0)$. Give this connection.
- e) Use the connection you found in the previous point to replace the right hand side of equation (4), to obtain an equation where $a(t)$ is the only time dependent quantity.
- f) Finally set $k = 0$ and find the explicit solution of the equation you found in the previous point. Consider in particular the cases $w = \frac{1}{3}$, $w = 0$, and $w = -1$.

Problem 3. Some astronomical facts

- a) What is the distance from the earth to the Sun?
- b) What is the speed of the earth around the Sun?
- c) What is the distance from Jupiter to the Sun?
- d) What is the radius of the Sun?
- e) Where is the center-of-mass of the solar system?
- f) What is the *astronomical unit* (a.u.)?
- g) How long is a *lightyear*?
- h) How long is a *parsec*?
- i) What is the distance to the closest (next to the sun) star?

- j) What is the distance from the sun to the center of our galaxy?
- k) What is the size of our galaxy?
- l) What is the distance to the nearest spiral galaxy?
- m) What is the age of the universe?

Some expressions which *may* be of use

Euler-Lagrange equations

The Euler-Lagrange equations for a field theory described by the Lagrangian $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi_a, \partial_\mu \varphi_a, x)$ are

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_a)} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_a}. \quad (8)$$

The corresponding equations for point particle mechanics is obtained by restricting ∂_μ to only a time derivative d/dt .

Nöther's theorem

Assume the action is invariant under the continuous transformations $\varphi_a \rightarrow \varphi_a + \varepsilon \delta \varphi_a + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$, more precisely that $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + \varepsilon \partial_\mu \Lambda^\mu + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$ under this transformation. Then there is an associated conserved current,

$$J^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_a)} \delta \varphi_a - \Lambda^\mu. \quad (9)$$

I.e., $\partial_\mu J^\mu = 0$. The corresponding expression for point particle mechanics is obtained by restricting ∂_μ to only a time derivative d/dt .