NTNU **Institutt for fysikk**

Faglig kontakt under eksamen:
Professor Kåre Olaussen
Telefon: 45 43 71 70

Eksamen i FY3452 GRAVITASJON OG KOSMOLOGI

Torsdag 8. august 2013
09:00–13:00

Tillatte hjelpemidler: Alternativ **C**
Standard kalkulator (ifølge NTNU's liste).
K. Rottman: *Matematisk formelsamling* (alle språkutgaver).
Barnett & Cronin: *Mathematical Formulae*
Dette oppgavesettet er på 2 sider.

Oppgave 1. Aspekter ved standardmodellen for kosmologi

I standardmodellen for kosmologi (Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker modellen) innfører man forskjellige former for materie eller energi. Forklar hva man i denne forbindelsen mener med

a) Mørk energi eller kvintessens (dark energy or quintessence).

b) Mørk materie (dark matter).

c) Kald materie (cold matter).

d) Varm materie (hot matter)

e) Omtrent hvor stor andel (i prosent) av den total energitettheten utgjør hver av disse energiformene i dag (ifølge beste tilpasning til kosmologiske data)?

f) Hvordan skalerer tettheten av disse energiformene med universet ekspansjon, dvs. med skalafaktoren $a(t)$?

Matematisk kan Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker modellen, med kun én form for energi eller materie (når man også betrakter kosmologisk konstant og krumningseffekter som energiformer), oppsummeres ved Friedmanns første ligning,

$$H^2 = \frac{8\pi}{3}\frac{G_N}{c^2}\,\varepsilon, \tag{1}$$

konserveringsloven

$$\dot{\varepsilon} + 3H(\varepsilon + P) = 0 \tag{2}$$

(der $\dot{}$ betyr derivasjon med hensyn på tiden t), og tilstandsligningen

$$P = w\varepsilon. \tag{3}$$

Her er $H \equiv H(t) = a(t)^{-1}\frac{d}{dt}a(t)$ Hubble-parameteren, der $a(t)$ skalafaktorer i modellen.

g) Anta at w er en konstant, og bruk ligningene (2-3) til å finne hvordan ε varier med skalafaktoren a. Dvs. vis at $\varepsilon(t) \sim a(t)^{\mu}$, og bestem konstanten μ.

h) Bruk resultatet fra forrige punkt sammen med ligning (1) til å finne hvordan $a(t)$ varierer med tiden t. Dvs. vis at $a(t) \sim t^{\nu}$ (unntatt en spesiell verdi av w), og bestem konstanten ν.

Oppgave 2. Forenklet Randall-Sundrum modell

Se på geometrien definert av linje-elementet

$$\mathrm{d}\tau^2 = \mathrm{e}^{k|u|}\left(\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2\right) - \mathrm{d}u^2, \tag{4}$$

dvs. et univers med en ekstra romdimensjon (u-retningen). Bevegelsen til en punktpartikkel (med masse $m = \frac{1}{2}$ i passende enheter) i denne geometrien er bestemt av Lagrangefunksjonen,

$$L = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \, \dot{x}^\nu, \tag{5}$$

via Hamiltons prinsipp. Her løper μ, ν over *fem* tidrom indekser,

$$x^\mu \equiv \left(x^0, x^1, x^2, x^3, x^4\right) = (t, x, y, z, u)\,, \tag{6}$$

og $\dot{}$ betyr derivasjon med hensyn til egentid τ.

a) Finn Euler-Lagrange ligningene for bevegelse i denne geometrien.

b) Sammenlign resultatene fra forrige punkt med de geodesiske ligningene på generell form, og bruk dette til å finne alle ikke-forsvinnende Christoffel-symboler $\Gamma^\mu{}_{\nu\lambda}$ for denne geometrien.

c) Lagrangefunksjonen L avhenger ikke eksplisitt av t. Hvilken konservert størrelse gir dette opphav til?

d) Lagrangefunksjonen L avhenger ikke eksplisitt av $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$. Hvilke konserverte størrelser gir dette opphav til?

e) Lagrangefunksjonen L avhenger ikke eksplisitt av τ. Hvilken konservert størrelse gir dette opphav til?

En massiv partikkel starter i punktet $\boldsymbol{r} = 0$, $u = 0$ ved tiden $t = 0$, med "hastighetene" $\dot{\boldsymbol{r}} = (v_0, 0, 0)$ og $\dot{u} = v_1 > 0$.

f) Hva er tidens "hastighet", $\dot{t}$, ved starttidspunktet?

g) Finn $\dot{t}$, $\dot{x}$, $\dot{y}$ og $\dot{z}$ uttrykt ved $\dot{u}$, u og startverdiene.

h) Finn den største absoluttverdien som u kan anta.

i) Beregn så langt du kan banen $x^\mu(\tau)$ til denne partikkelen.

Some expressions which *may* be of use

Geodesic equations

The geodesic equations in a geometry with connection coefficients ${\Gamma^\mu}_{\nu\lambda}$ are

$$\ddot{x}^\mu + {\Gamma^\mu}_{\nu\lambda}\,\dot{x}^\nu\dot{x}^\lambda = 0. \tag{7}$$

Euler-Lagrange equations

The Euler-Lagrange equations for a field theory described by the Lagrangian $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi_a, \partial_\mu\varphi_a, x)$ are

$$\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_a)}\right) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_a}. \tag{8}$$

The corresponding equations for point particle mechanics is obtained by restricting ∂_μ to only a time derivative $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$.

Nöther's theorem

Assume the action is invariant under the continuous transformations $\varphi_a \to \varphi_a + \varepsilon\,\delta\varphi_a + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$, more precisely that $\mathcal{L} \to \mathcal{L} + \varepsilon\,\partial_\mu\Lambda^\mu + \mathcal{O}(\epsilon^2)$ under this transformation. Then there is an associated conserved current,

$$J^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_a)}\delta\varphi_a - \Lambda^\mu. \tag{9}$$

I.e., $\partial_\mu J^\mu = 0$. The corresponding expression for point particle mechanics is obtained by restricting ∂_μ to only a time derivative $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$.