



Løsningsforslag til eksamen i FY3452 GRAVITASJON OG KOSMOLOGI

Torsdag 8. august 2013

Dette løsningsforslaget er på 6 sider.

Oppgave 1. Aspekter ved standardmodellen for kosmologi

I standardmodellen for kosmologi (Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker modellen) innfører man forskjellige former for materie eller energi. Forklar hva man i denne forbindelsen mener med

- a) Mørk energi eller kvintessens (dark energy or quintessence).

Mørk energi er energiform der det assosierte trykket P er relatert til energitettheten ε ved formelen

$$P = -\varepsilon. \quad (1)$$

I standardmodellend for kosmologi er mørk energi nødvendig for å forklare universets aksele-
rerende ekspansjon de siste (ca. fem) milliarder år.

Kommentar: *Mørk* henspiller i denne forbindelse på at man er litt i mørke når det gjelder kunnskap om denne energiformen, spesielt når det gjelder uavhengige observasjoner av denne, men noen alternativer er *vakuumenergi* og *kosmologisk konstant*.

- b) Mørk materie (dark matter).

Mørk materie er ikke-relativistisk materie som ikke er direkte synlig som lysgivende objekter, dvs. stjerner og galakser. Den er nødvendig i standardmodellen for å forklare galaksedynamikk og universets struktur på stor skala, og observerte gravitasjonlinse-effekter.

Kommentar: *Mørk* henspiller her først og fremst på at denne materien ikke er synlig i teleskoper, og ikke ser ut til å påvirke lysende materie på annen måte enn gjennom gravitasjonspåvirkning. Men man er også noe i mørke med hensyn til hva denne materien består av.

- c) Kald materie (cold matter).

Kald materie kan er materie som beveger seg ikke-relativistisk, slik at det kinetiske energibidraget er mye mindre enn bidraget fra hvilemassen. Dette betyr at vi kan neglisjere effekter av trykket P i standardmodellen,

$$P \approx 0. \quad (2)$$

Kald materie består av både mørk og normal lysende (av kjent form) materie.

Kommentar: Stjerner, med temperatur på noen tusen grader, regnes altså som kald materie i denne sammenhengen.

d) Varm materie (hot matter)

Varm materie er relativistisk materie, der det kinetiske energibidraget er mye større enn bidraget fra en eventuell hvilemasse. I standardmodellen betyr dette at vi har sammenhengen

$$P = \frac{1}{3}\varepsilon. \quad (3)$$

e) Omtrent hvor stor andel (i prosent) av den total energitettheten utgjør hver av disse energiformene i dag (ifølge beste tilpasning til kosmologiske data)?

Ifølge siste tilpassning utgjør mørk energi ca. 68% og kald materie ca. 32% (ca. 27% mørk pluss ca. 5% normal materie) av energitettheten i universet. Bidraget fra den varme materien er altså neglisjerbar idag.

f) Hvordan skalerer tettheten av disse energiformene med universet ekspansjon, dvs. med skalafaktoren $a(t)$?

- Energitettheten til mørk energi er uavhengig av ekspansjonen, $\varepsilon \sim a^0$.
- Energitettheten til kald materie er omvendt proporsjonal med universets volum, $\varepsilon \sim a^{-3}$. Dette kan tolkes som at antallet massive partikler, og deres masse, er konstant.
- Energitettheten til varm materie skalerer som $\varepsilon \sim a^{-4}$. Dette kan tolkes som at antallet masseløse partikler er konstant, men at deres energi avtar som a^{-1} pga. rødforskyvning.

Matematisk kan Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker modellen, med kun én form for energi eller materie (når man også betrakter kosmologisk konstant og krumningseffekter som energiformer), oppsummeres ved Friedmanns første ligning,

$$H^2 = \frac{8\pi}{3} \frac{G_N}{c^2} \varepsilon, \quad (4)$$

konserveringsloven

$$\dot{\varepsilon} + 3H(\varepsilon + P) = 0 \quad (5)$$

(der $\dot{}$ betyr derivasjon med hensyn på tiden t), og tilstandsligningen

$$P = w\varepsilon. \quad (6)$$

Her er $H \equiv H(t) = a(t)^{-1} \frac{d}{dt} a(t)$ Hubble-parameteren, der $a(t)$ skalafaktorer i modellen.

g) Anta at w er en konstant, og bruk ligningene (5-6) til å finne hvordan ε varierer med skalafaktoren a . Dvs. vis at $\varepsilon(t) \sim a(t)^\mu$, og bestem konstanten μ .

Vi setter (6) inn i (5) og deler på ε ,

$$\frac{\dot{\varepsilon}}{\varepsilon} + 3(1+w)\frac{\dot{a}}{a} = 0.$$

Dette kan omskrives som

$$\frac{d}{dt} [\log \varepsilon(t) + 3(1+w) \log a(t)] = \frac{d}{dt} \log [\varepsilon(t) a(t)^{3(1+w)}] = 0.$$

Dvs. at $\varepsilon(t) a(t)^{3(1+w)}$ er tidsuavhengig,

$$\varepsilon(t) \sim a(t)^{-3(1+w)}. \quad (7)$$

h) Bruk resultatet fra forrige punkt sammen med ligning (4) til å finne hvordan $a(t)$ varierer med tiden t . Dvs. vis at $a(t) \sim t^\nu$ (unntatt en spesiell verdi av w), og bestem konstanten ν .

Ligning (7) innsatt i (4) impliserer at

$$\frac{\dot{a}}{a} = K a^{-\frac{3}{2}(1+w)}, \quad (8)$$

der K er en ukjent konstant. I spesialtilfellet $w = -1$ gir dette

$$\dot{a}(t) = K a(t),$$

med løsning

$$a(t) = e^{Kt} a(0). \quad (9)$$

For $w \neq -1$ omskriver vi ligningen til

$$a^{\frac{1}{2}(1+3w)} da = \frac{2}{3(1+w)} da^{\frac{3}{2}(1+w)} = K dt$$

Dvs. at

$$a(t) \sim t^{\frac{2}{3(1+w)}}. \quad (10)$$

Vi har valgt et passende nullpunkt for tiden t .

Oppgave 2. Forenklet Randall-Sundrum modell

Se på geometrien definert av linje-elementet

$$d\tau^2 = e^{k|u|} (dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2) - du^2, \quad (11)$$

dvs. et univers med en ekstra romdimensjon (u -retningen). Bevegelsen til en punktpartikkel (med masse $m = \frac{1}{2}$ i passende enheter) i denne geometrien er bestemt av Lagrangefunksjonen,

$$L = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu, \quad (12)$$

via Hamiltons prinsipp. Her løper μ, ν over *fem* tidrom indekser,

$$x^\mu \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3, x^4) = (t, x, y, z, u), \quad (13)$$

og $\dot{}$ betyr derivasjon med hensyn til egentid τ .

a) Finn Euler-Lagrange ligningene for bevegelse i denne geometrien.

Fra de generelle Euler-Lagrange ligningene

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\sigma} \right) = \frac{\partial L}{\partial x^\sigma}$$

finner vi

$$\frac{d}{d\tau} e^{k|u|} \dot{t} = 0, \quad (14a)$$

$$\frac{d}{d\tau} e^{k|u|} \dot{x} = 0, \quad (14b)$$

$$\frac{d}{d\tau} e^{k|u|} \dot{y} = 0, \quad (14c)$$

$$\frac{d}{d\tau} e^{k|u|} \dot{z} = 0, \quad (14d)$$

$$\frac{d}{d\tau} e^{k|u|} \dot{u} = \frac{1}{2} \theta(u) k e^{k|u|} (\dot{t}^2 - \dot{x}^2 - \dot{y}^2 - \dot{z}^2). \quad (14e)$$

Her er $\theta(u)$ stepfunksjonen,

$$\theta(u) = \begin{cases} 1 & \text{for } u > 0, \\ -1 & \text{for } u < 0. \end{cases}$$

b) Sammenlign resultatene fra forrige punkt med de geodesiske ligningene på generell form, og bruk dette til å finne alle ikke-forsvinnende Christoffel-symboler $\Gamma^\mu_{\nu\lambda}$ for denne geometrien.

For å sammenligne med de generelle geodesiske ligningene,

$$\ddot{x}^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} \dot{x}^\nu \dot{x}^\lambda = 0,$$

utfører vi derivasjonen på venstresidene av (14), og multipliserer med $e^{-k|u|}$. Vi har at

$$e^{-k|u|} \frac{d}{d\tau} e^{k|u|} = \theta(u) k \dot{u},$$

slik at (14) blir

$$\ddot{t} + 2g(u) \dot{u} \dot{t} = 0, \quad (15a)$$

$$\ddot{x} + 2g(u) \dot{u} \dot{x} = 0, \quad (15b)$$

$$\ddot{y} + 2g(u) \dot{u} \dot{y} = 0, \quad (15c)$$

$$\ddot{z} + 2g(u) \dot{u} \dot{z} = 0, \quad (15d)$$

$$\ddot{u} + g(u) (-\dot{t}\dot{t} + \dot{x}\dot{x} + \dot{y}\dot{y} + \dot{z}\dot{z} + 2\dot{u}\dot{u}) = 0, \quad (15e)$$

der $g(u) = \frac{1}{2}\theta(u)k$. Fra dette Leser vi ut alle Christoffel-symboler som ikke er null:

$$\Gamma_{ut}^t = \Gamma_{tu}^t = \Gamma_{ux}^x = \Gamma_{xu}^x = \Gamma_{uy}^y = \Gamma_{yu}^y = \Gamma_{uz}^z = \Gamma_{zu}^z = g(u), \quad (16a)$$

$$\Gamma_{tt}^u = -\Gamma_{xx}^u = -\Gamma_{yy}^u = -\Gamma_{zz}^u = -g(u), \quad (16b)$$

$$\Gamma_{uu}^u = 2g(u). \quad (16c)$$

- c) Lagrangefunksjonen L avhenger ikke eksplisitt av t . Hvilken konserverte størrelse gir dette opphav til?

Ifølge Nöthers teorem blir den konserverte størrelsen,

$$\varepsilon = \frac{\partial L}{\partial \dot{t}} = e^{k|u|} \dot{t}, \quad (17)$$

som vi normalt vil indentifisere med systemets energi (eller noe proporsjonalt med denne). Vi kan også lese ut denne konserveringsloven direkte fra ligning (14a).

- d) Lagrangefunksjonen L avhenger ikke eksplisitt av $\mathbf{r} = (x, y, z)$. Hvilke konserverte størrelser gir dette opphav til?

Ifølge Nöthers teorem blir de konserverte størrelsene,

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} = e^{k|u|} \dot{\mathbf{r}}, \quad (18)$$

som vi normalt vil indentifisere med systemets bevegelsesmengde (eller noe proporsjonalt med denne). Vi kan også lese ut disse konserveringslovene direkte fra ligningene (14b-14d).

- e) Lagrangefunksjonen L avhenger ikke eksplisitt av τ . Hvilken konserverte størrelse gir dette opphav til?

Ifølge Nöthers teorem blir konserveringsloven

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \dot{x}^\mu - L = L. \quad (19)$$

Dette sier bare at partikkelens *femmer-hastighet*¹ har konstant lengde; egentiden τ er valgt slik at

$$g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 1, \quad (20)$$

slik man kan lese ut av ligning (11) etter divisjon med $d\tau^2$. De dynamiske ligningene er konsistent med denne normaliseringsbetingelsen. Her finner vi altså konserveringsloven (eller normaliseringsbetingelsen)

$$e^{k|u|} (\dot{t}^2 - \dot{x}^2 - \dot{y}^2 - \dot{z}^2) - \dot{u}^2 = 1. \quad (21)$$

¹Normalt (i et firedimensjonalt tidrom) kalt *firer-hastighet*.

En massiv partikkel starter i punktet $\mathbf{r} = 0$, $u = 0$ ved tiden $t = 0$, med “hastighetene” $\dot{\mathbf{r}} = (v_0, 0, 0)$ og $\dot{u} = v_1 > 0$.

f) Hva er tidens “hastighet”, $\dot{t}$, ved starttidspunktet?

Ifølge ligning (21) må vi ha

$$\dot{t}^2 = e^{-k|u|} + \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = 1 + v_0^2 + v_1^2,$$

dvs. for $\dot{t}(0) \equiv \dot{t}_0$,

$$\dot{t}_0 = \sqrt{1 + v_0^2 + v_1^2}. \quad (22)$$

g) Finn $\dot{t}$, $\dot{x}$, $\dot{y}$ og $\dot{z}$ uttrykt ved $\dot{u}$, u og startverdiene.

Fra konserveringslovene for energi og bevegelsesmengde finner vi at

$$\dot{t} = e^{-k|u|} \dot{t}_0, \quad (23a)$$

$$\dot{x} = e^{-k|u|} v_0, \quad (23b)$$

$$\dot{y} = 0, \quad (23c)$$

$$\dot{z} = 0. \quad (23d)$$

h) Finn den største absoluttverdien som u kan anta.

Ligning (23) innsatt i ligning (21) gir

$$\dot{u}^2 = (1 + v_1^2) e^{-k|u|} - 1. \quad (24)$$

Siden venstresiden må være ikke-negativ har vi at

$$(1 + v_1^2) e^{-k|u|} \geq 1,$$

eller

$$|u| \leq \frac{\log(1 + v_1^2)}{k} \equiv u_{\max}. \quad (25)$$

i) Beregn så langt du kan banen $x^\mu(\tau)$ til denne partikkelen.

Vi antar først at $u \geq 0$ og $\dot{u} \geq 0$. Ligning (24) kan da skrives på formen

$$\frac{du}{\sqrt{(1 + v_1^2) e^{-ku} - 1}} = d\tau. \quad (26)$$

Ved å innføre $\rho = \sqrt{(1 + v_1^2) e^{-ku} - 1}$ kan dette omskrives som

$$\frac{d\rho}{1 + \rho^2} = d \arctan \rho = -\frac{1}{2} k d\tau. \quad (27)$$

Dette kan integreres til

$$\arctan \rho = \phi_0 - \frac{1}{2} k\tau.$$

Ved inversjon finnes så at

$$\rho(\tau) = \tan\left(\phi_0 - \frac{1}{2} k\tau\right). \quad (28)$$

Her er ϕ_0 en konstant bestemt slik at $\tan \phi_0 = \rho(0) = v_1$. Fra dette finner vi for $u > 0$,

$$e^{-ku} = \frac{1 + \rho^2}{1 + v_1^2} = \frac{1}{(1 + v_1^2) \cos^2(\phi_0 - \frac{1}{2} k\tau)}. \quad (29)$$

Ved innsetting i ligningene (23) kan disse integreres til

$$\begin{aligned} t(\tau) &= \frac{\sqrt{1+v_0^2+v_1^2}}{1+v_1^2} \int_0^\tau \frac{d\tau'}{\cos^2(\phi_0 - \frac{1}{2}k\tau')} \\ &= \frac{2}{k} \frac{\sqrt{1+v_0^2+v_1^2}}{1+v_1^2} \left[\tan(\phi_0) - \tan(\phi_0 - \frac{1}{2}k\tau) \right], \end{aligned} \quad (30a)$$

$$\begin{aligned} x(\tau) &= \frac{v_0}{1+v_1^2} \int_0^\tau \frac{d\tau'}{\cos^2(\phi_0 - \frac{1}{2}k\tau')} \\ &= \frac{2}{k} \frac{v_0}{1+v_1^2} \left[\tan(\phi_0) - \tan(\phi_0 - \frac{1}{2}k\tau) \right], \end{aligned} \quad (30b)$$

$$y(\tau) = 0, \quad (30c)$$

$$z(\tau) = 0. \quad (30d)$$

Den siste koordinaten er allerede gitt av ligning (29),

$$u(\tau) = \frac{1}{k} \log \left[(1+v_1^2) \cos^2(\phi_0 - \frac{1}{2}k\tau) \right]. \quad (31)$$

Some expressions which *may* be of use

Geodesic equations

The geodesic equations in a geometry with connection coefficients $\Gamma^\mu{}_{\nu\lambda}$ are

$$\ddot{x}^\mu + \Gamma^\mu{}_{\nu\lambda} \dot{x}^\nu \dot{x}^\lambda = 0. \quad (32)$$

Euler-Lagrange equations

The Euler-Lagrange equations for a field theory described by the Lagrangian $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi_a, \partial_\mu \varphi_a, x)$ are

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_a)} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_a}. \quad (33)$$

The corresponding equations for point particle mechanics is obtained by restricting ∂_μ to only a time derivative d/dt .

Nöther's theorem

Assume the action is invariant under the continuous transformations $\varphi_a \rightarrow \varphi_a + \varepsilon \delta \varphi_a + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$, more precisely that $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + \varepsilon \partial_\mu \Lambda^\mu + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$ under this transformation. Then there is an associated conserved current,

$$J^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_a)} \delta \varphi_a - \Lambda^\mu. \quad (34)$$

I.e., $\partial_\mu J^\mu = 0$. The corresponding expression for point particle mechanics is obtained by restricting ∂_μ to only a time derivative d/dt .

