

NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE
UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:

Navn: Kåre Olaussen

Telefon: 9 36 52

Eksamen i fag 74327 RELATIVISTISK KVANTEMEKANIKK

Fredag 26. mai 2000

Tid: 09:00—14:00

Tillatte hjelpemidler: (Alternativ B): Godkjent lommekalkulator.

K. Rottman: *Matematisk formelsamling*.

Barnett and Cronin: *Mathematical Formulae*.

Øgrim: *Størrelser og enheter i fysikken*

Dette eksamenssettet er på 3 sider pluss et generelt vedlegg på 2 sider.

Sensuren legges ut på fagets website,

<http://www.phys.ntnu.no/~kolaussen/74327-2000/>

straks den er klar.

Note: There also exists an english version of this exam set.

Oppgave 1:

- a) Tegn, i de tilfeller dette er mulig i kvante-elektrodynamikk (*QED*), Feynman diagrammene for alle bidrag av laveste ikke-trivielle orden for prosessene nedenfor. For noen tilfeller eksisterer det Feynman diagram, men prosessen er likevel ikke mulig i vakuum. Angi slike tilfeller, og forklar kort hva som gjør prosessen umulig.

1. $e^+\gamma \rightarrow e^+\gamma$

2. $e^+\gamma \rightarrow e^+\gamma\gamma$

3. $e^+\mu^- \rightarrow e^-\mu^+$

4. $e^+\mu^- \rightarrow e^+\mu^-$

5. $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$

6. $e^- \rightarrow e^-\mu^+\mu^-$

7. $\gamma\gamma \rightarrow \gamma$

8. $\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma$

9. $\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma\gamma$

b) Se nå i litt mer detalj på Compton spredning, $e^- \gamma \rightarrow e^- \gamma$.

1. Tegn Feynman-diagrammene for alle bidrag av laveste ikke-trivielle orden for denne prosessen. Påfør diagrammene alle nødvendige impulser og indekser. Anta at det innkommende (resp. utgående) elektronet har kvantetall p, s (resp. p', s'), og at det innkommende (resp. utgående) fotonet har kvantetall k, r (resp. k', r'). Innfør videre $q = p + k$ og $q' = p - k'$.
2. Bruk Feynman-reglene i vedlegget til å skrive ned de tilhørende algebraiske bidragene til spredningsamplituden $\mathcal{M}_{fi}$.
3. Benytt “naturlige enheter” (der $\hbar = c = \varepsilon_0 = \mu_0 = 1$) og anta at prosessen betraktes fra et koordinatsystem der det innkommende fotonet har frekvens ω , dvs. at $k = (\omega, 0, 0, \omega)$, og spres mot et elektron som opprinnelig er i ro, dvs. at $p = (m, 0, 0, 0)$. Bruk konservering av energi og bevegelsesmengde til å bestemme frekvensen ω' til det utgående fotonet som funksjon av fotonets spredningsvinkel ϑ .
4. Bruk dimensjonsanalyse og kvalitativ informasjon fra Feynman diagrammene til å anslå størrelsesorden til det totale spredningstverrsnittet i det spesialtilfellet at det innkommende fotonet har svært lav frekvens, $\omega \ll m$. Dvs., bestem hvilken algebraisk kombinasjon av fysiske parametre tverrsnittet da må avhenge av, og regn ut størrelsen på denne kombinasjonen i vanlige SI-enheter.
5. Det differensielle spredningstverrsnittet for Compton spredning kan skrives på formen,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = K |\mathcal{M}_{fi}|^2, \quad (1)$$

der $\mathcal{M}_{fi}$ er spredningsamplituden fra underpunkt 2 og $d\Omega = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$. Bruk informasjon i vedlegget til å finne et eksplisitt uttrykk for faktoren K .

6. Det upolariserte tverrsnittet framkommer ved at vi midler over spinntilstandene (r, s) til de innkommende partiklene, og summerer over spinntilstandene (r', s') til de utgående partiklene. Amplitudekvadratet $\sum_{rsr's'} |\mathcal{M}_{fi}|^2$ kan da uttrykkes som en sum av spor over γ -matriser (med prefaktorer). Finn denne summen. Du trenger ikke å regne ut sporene.

Oppgitt:

Planck's konstant	$\hbar = 1.054\,572\,66(63) \times 10^{-34} \text{ J s}$
Lyshastigheten	$c = 299\,792\,458 \text{ m s}^{-1}$
Elektronets masse	$m = 9.1096 \times 10^{-31} \text{ kg}$
Finstrukturkonstanten	$\alpha = e^2/4\pi\varepsilon_0\hbar c = 1/137.035\,989\,5(61)$

Oppgave 2:

Anta at $p^2 = p'^2 = m^2$, og $k^2 = k'^2 = 0$. Beregn følgende spor av γ -matriser:

$$T_1 = \text{Tr}\{\gamma^\mu \not{k} \gamma^\nu \gamma_\nu \not{k} \gamma_\mu\} \quad (2)$$

$$T_2 = \text{Tr}\{\gamma^\mu \not{k} \gamma^\nu \gamma_\mu \not{k}' \gamma_\nu\} \quad (3)$$

$$T_3 = \text{Tr}\{\gamma^\mu \not{k} \gamma^\nu \not{p} \gamma_\nu \not{k} \gamma_\mu \not{p}'\} \quad (4)$$

$$T_4 = \text{Tr}\{\gamma^\mu \not{k} \gamma^\nu \not{p} \gamma_\mu \not{k}' \gamma_\nu \not{p}'\} \quad (5)$$

Oppgave 3:

I denne oppgaven skal du analysere en reell Klein-Gordon feltteori (i $3 + 1$ rom-tids dimensjoner), definert ved Lagrangetettheten

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 - \kappa \varphi, \quad (6)$$

der m^2 og κ er konstante parametre, og vi bruker naturlige enheter.

- a) Hvilken lengde-dimensjon har parametrene m og κ ?
- b) Finn feltligningen som φ må oppfylle.
- c) Finn feltet Π_φ som er kanonisk konjugert til feltet φ .
- d) Finn den tilhørende Hamiltontettheten $\mathcal{H}$ for denne modellen.
- e) Bestem hvordan energitettheten i vakuum,

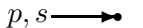
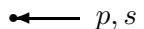
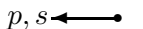
$$T_{\text{vac}}^{00} = \langle \Omega | \mathcal{H} | \Omega \rangle = \frac{1}{V} E_{\text{vac}}, \quad (7)$$

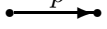
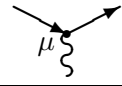
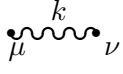
avhenger av parameteren κ i denne modellen.

Vedlegg 1:**1 Sammenheng mellom amplitude $\mathcal{M}_{fi}$ og tverrsnitt σ**

$$d\sigma = \frac{|\mathcal{M}_{fi}|^2}{4\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - \sum_i p'_i) \prod_{i=1}^n \frac{d^3 p'_i}{(2\pi)^3 2E'_i} \quad (8)$$

2 Noen Feynmanregler for $-i\mathcal{M}_{fi}$:

1. Utgående partikler			2. Innkommende partikler		
Type partikler	Grafisk symbol	Algebraisk uttrykk	Type partikler	Grafisk symbol	Algebraisk uttrykk
$e^-, \mu^-, \dots$		$\bar{u}(p, s)$	$e^-, \mu^-, \dots$		$u(p, s)$
$e^+, \mu^+, \dots$		$v(p, s)$	$e^+, \mu^+, \dots$		$\bar{v}(p, s)$
γ (foton)		$e_\mu(k, r)^*$	γ (foton)		$e_\mu(k, r)$
Uladet spinn-0		1	Uladet spinn-0		1

3. Propagatorer			4. Vekselvirkningsknuter		
Type partikler	Grafisk symbol	Algebraisk uttrykk	V.virkning $\mathcal{L}_{int}$	Grafisk symbol	Algebraisk uttrykk
$e^\pm, \mu^\pm, \dots$		$\frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$	$e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$		$ie\gamma^\mu$
γ (foton)		$\frac{-i\eta_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon}$	$-\frac{1}{3!}\mu\varphi^3$		$-i\mu$
Uladet spinn-0		$\frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon}$	$-\frac{1}{4!}\lambda\varphi^4$		$-i\lambda$

- Konservering av firer-impuls i hver knute.
- Integrasjon $\int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4}$ over hver ubestemt impuls.
- Faktor -1 for hver lukket fermionsløyfe.
- Relativt minustegn mellom diagrammer som adskiller seg ved ombytte av to fermioner.
- Kombinatorisk faktor $1/S$, der S er diagrammets symmetritall.

3 Noen fullstendighetsrelasjoner

Dirac partikler, Dirac antipartikler, og fotoner

$$\sum_{s=1}^2 u(p, s) \bar{u}(p, s) = \not{p} + m, \quad \sum_{s=1}^2 v(p, s) \bar{v}(p, s) = \not{p} - m \quad (9)$$

$$\sum_{r=1}^2 e_{\mu}(k, r) e_{\nu}^{*}(k, r) = -\eta_{\mu\nu} + \text{irrelevante ledd} \quad (10)$$

4 Dirac's γ -matriser

4.1 Standardrepresentasjonen

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad (11)$$

der I er en 2×2 enhetsmatrise, og $\boldsymbol{\sigma}$ er Pauli-matrisene,

$$\sigma^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (12)$$

som oppfyller den algebraiske relasjonen

$$\sigma^i \sigma^j = \delta^{ij} + i\epsilon^{ijk} \sigma^k, \text{ dvs. at } (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \quad (13)$$

4.2 Algebraiske relasjoner

$$\{\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}\} = 2\eta^{\mu\nu} \implies \not{p}\not{p} = p^2 \quad (14)$$

$$\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma_{\mu} = -2\gamma^{\nu} \implies \gamma_{\mu}\not{p}\gamma^{\mu} = -2\not{p} \quad (15)$$

$$\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\lambda}\gamma_{\mu} = 4\eta^{\nu\lambda} \implies \gamma_{\mu}\not{p}\not{q}\gamma^{\mu} = 4(pq) \quad (16)$$

$$\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\lambda}\gamma^{\sigma}\gamma_{\mu} = -2\gamma^{\sigma}\gamma^{\lambda}\gamma^{\nu} \implies \gamma_{\mu}\not{p}\not{q}\not{r}\gamma^{\mu} = -2\not{r}\not{q}\not{p} \quad (17)$$

4.3 Noen spor-uttrykk

$$\text{Tr } 1 = 4 \quad (18)$$

$$\text{Tr } \gamma^{\mu} = 0 \quad (19)$$

$$\text{Tr } \gamma^{\mu}\gamma^{\nu} = 4\eta^{\mu\nu} \implies \text{Tr } \not{p}\not{q} = 4(pq) \quad (20)$$

$$\text{Tr } \gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\lambda} = 0 \quad (21)$$

$$\text{Tr } \gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\lambda}\gamma^{\sigma} = 4\left(\eta^{\mu\nu}\eta^{\lambda\sigma} - \eta^{\mu\lambda}\eta^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\sigma}\eta^{\nu\lambda}\right) \quad (22)$$

$$\implies \text{Tr } \not{p}\not{q}\not{r}\not{s} = 4(pq)(rs) - 4(pr)(qs) + 4(ps)(qr)$$