UNIVERSITETET I TRONDHEIM
NORGES TEKNISKE HØGSKOLE
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
F.aman. F. Bakke
Tlf. 3649

EKSAMEN I FAG 74327 RELATIVISTISK KVANTEMEKANIKK

Fredag 8. juni 1990

kl.0900-1300

Tillatte hjelpemidler: Rottmann: Mathematische Formelsammlung
Godkjent lommekalkulator.

Oppgave 1

a) Skriv opp Diraclikningen for et elektron med ladning e i et elektromagnetisk felt med potensial $A^\mu = (\frac{1}{c}\phi, \vec{A})$ og redegjør for de størrelsene som inngår.

b) Lorentz-transformasjonen $x^{\mu'} = a^\mu{}_\nu x^\nu$ gir sammenhengen mellom koordinatene i et inertialsystem L som beveger seg med konstant hastighet $\vec{v}$ i forhold til et annet inertialsystem L'.

Når bevegelsen foregår langs de parallelle x-aksene er

$$a^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \cosh\alpha & \sinh\alpha & 0 & 0 \\ \sinh\alpha & \cosh\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{med} \quad \cosh\alpha = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \quad \sinh\alpha = \frac{v/c}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

Sammenhengen mellom Dirac-spinoren ψ i de to systemene er gitt ved en transformasjonsmatrise S

$$\psi'_\alpha = S_{\alpha\beta}\psi_\beta$$

mens Dirac-matrisene γ^μ er de samme i begge systemene.
Vis at når matrisene $a^\mu{}_\nu$ og S tilfredstiller betingelseslikningene

$$a^\lambda{}_\mu \gamma^\mu = S^{-1}\gamma^\lambda S$$

så er Dirac-likningen invariant med denne Lorentz-transformasjonen.

c) Vis at matrisen

$$S = 1 \cosh \frac{\alpha}{2} - \gamma^0\gamma^1 \sinh \frac{\alpha}{2}$$

tilfredstiller denne betingelsen når bevegelsen foregår langs x-aksen.

d) Finn en løsning ψ_0 av Dirac-likningen for et fritt elektron i ro med positiv energi $(\vec{p} = 0,\ A^\mu = 0)$ når en bruker standard-representasjonen for γ^μ .

e) Benytt dette til å finne tilstandsfunksjonen for et fritt elektron i et vilkårlig inertialsystem.

Oppgave 2

a) Tegn laveste ordens Feynman -diagrammer for prosessene
 i) $e^-\gamma \to e^-\gamma$
 ii) $e^+e^- \to \gamma\gamma$

b) Bruk Feynman -reglene til å skrive opp de algebraiske uttrykkene for de tilhørende bidragene til spredningsamplituden S_{fi}.

c) Gi en enkel definisjon av spredningsamplituden S_{fi} og vis at det differensielle reaksjonstverrsnitt for en reaksjon mellom to partikler som fører til også to partikler i slutt-tilstanden er

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_f} = \frac{2\pi}{v_i} \left|V^2 K_{fi}\right|^2 \rho_f(E_f)$$

hvor K_{fi} er bestemt av

$$S_{fi} = \delta_{fi} + K_{fi}(2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i) .$$

$P_f = (E_f, \vec{P}_f)$ og P_i er den totale 4-impuls i henholdsvis slutt- og begynnelses-tilstandene. v_i er de innkommende partiklenes relative hastighet. $\rho_f(E_f)$ er tetthet av slutt-tilstander med energi E_f og en partikkel i retning Ω_f .

V er normeringsvolumet. Her benyttes $V = (2\pi)^3$. Det er brukt enheter med $\hbar = c = 1$.

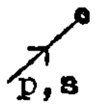
d) Når en regner i laboratoriesystemet hvor elektronet i begynnelsestilstanden er i ro $(\vec{p}_i = 0)$ kan uttrykket for S_{fi} i b) forenkles betraktelig ved å bruke noen av formlene i vedlegget og dessuten huske på at lyset er transversalt polarisert.
Utfør forenklingen for Comptonspredningen $e^- \gamma \to e^- \gamma$.

Regler for Feynman-diagram.

I impulsrommet

Ytre linjer:

Elektronlinjer:



$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{m}{E_p}\right)^{\frac{1}{2}} u(p,s)$

$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{m}{E_p}\right)^{\frac{1}{2}} \bar{u}\,(p,s)$

Positronlinjer:

$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{m}{E_p}\right)^{\frac{1}{2}} \bar{v}(p,s)$

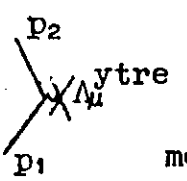
$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{m}{E_p}\right)^{\frac{1}{2}} v(p,s)$

Fotonlinjer:

$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{2\omega_k}\right)^{\frac{1}{2}} \hat{e}_{k\lambda}$

$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{2\omega_k}\right)^{\frac{1}{2}} \hat{e}_{k\lambda}$

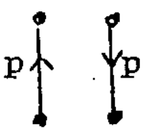
Ytre felt:



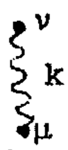
$-ie\gamma^{\mu} A_{\mu}^{ytre}(\vec{p}_2-\vec{p}_1)\ 2\pi\delta(E_1-E_2)$

med $A_{\mu}^{ytre}(\vec{k}) = \int A_{\mu}^{ytre}(\vec{r})\ e^{i\vec{k}\vec{r}} d^3x$

Indre linjer:

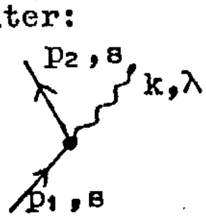


$\frac{i}{(2\pi)^4}\ \frac{\gamma p+m}{p^2-m^2+i\varepsilon}$ og $\int d^4p$ $\qquad (\varepsilon \to 0)$



$\frac{-i}{(2\pi)^4}\ g_{\mu\nu}\ \frac{1}{k^2+i\varepsilon}$ og $\int d^4k$

Knuter:



$-ie\gamma^{\lambda}(2\pi)^4\ \delta^4(p_1-p_2-k)$

Dirac-matrisene:

Antikommuteringsregler $\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$

med metrikken $g^{\mu\nu} = \begin{matrix} 1 & \text{når} & \mu = \nu = 0 \\ -1 & \text{når} & \mu = \nu \neq 0 \\ 0 & \text{når} & \mu \neq \nu \end{matrix}$

I standardrepresentasjonen er

$$\gamma^0 = \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \vec{\gamma} = \beta\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$$

med

$$\vec{\sigma} = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right] .$$

For to vektorer a^μ og b^μ gjelder med $\not{a} = a^\mu\gamma_\mu$.

$\not{a}\not{b} = -\not{b}\not{a} + 2a^\mu b_\mu$.

For projeksjonsoperatorene $\Lambda_\pm = \frac{\pm \not{p} - mc}{2mc}$ gjelder

$$\Lambda_+ u = u \qquad \Lambda_- v = v \qquad \Lambda_+ v = 0 \qquad \Lambda_- u = 0 .$$