

UNIVERSITETET I TRONDHEIM
NORGES TEKNISKE HØGSKOLE
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
F. aman. F. Bakke
Tlf. 3649

KONTINUASJONSEKSAMEN I FAG 74327 RELATIVISTISK KVANTEMEKANIKK

Mandag 13. august 1990

kl.0900-1300

Tillatte hjelpemidler: Rottmann: Mathematische Formelsammlung
Godkjent lommekalkulator.

Oppgave 1

- a) Skriv opp Dirac-likningen for en partikkel med masse M og ladning Q i et elektromagnetisk felt $A^\mu = (\frac{1}{c}\phi, \vec{A})$ og redegjør for de størrelsene som inngår.
- b) Finn $u(P)$ i løsningen

$$\psi(\vec{r}) = \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^{\frac{3}{2}} u(P) e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{P}\vec{r} - Et)}, \quad P = (\frac{1}{c} E, \vec{P})$$

av Dirac-likningen for en fri partikkel ($A^\mu=0$) med impuls $\vec{P}$ og positiv energi $E > 0$ når en bruker standardrepresentasjonen for γ^μ , og vis at for lave impulser $\frac{|\vec{P}|}{Mc} \ll 1$ har en tilnærmet

$$\psi(\vec{r}) \approx \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^{\frac{3}{2}} \left(1 + \frac{(\vec{P})^2}{8M^2c^2}\right) \begin{pmatrix} X \\ \frac{\vec{\sigma}\vec{P}}{2Mc} X \end{pmatrix} e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{P}\vec{r} - Et)}$$

Her er normeringen for 4-spinoren

$$u^\dagger(P) u(P) = \frac{E}{Mc^2}$$

og for 2-spinoren $X^\dagger X = 1$.

- c) Vis at Dirac-likningen for en fri partikkel kan utledes fra Lagrangetettheten

$$\mathcal{L} = c\bar{\psi} \left(i\hbar \gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - Mc \right) \psi$$

og finn den kanoniske konjugerte impuls π til ψ .

- d) Ved kanonisk kvantisering av Dirac-likningen blir $\psi(\vec{r}, t)$ og $\pi(\vec{r}, t)$ operatorer som må oppfylle visse kvantiseringsbetingelser. Skriv opp disse betingelsene.

- e) ψ kan skrives ut ved hjelp av kreasjons- og annihilasjons-operatorene for elektroner ($b^+(\vec{P}, s)$, $b(\vec{P}, s)$) og positroner ($d^+(\vec{P}, s)$, $d(\vec{P}, s)$) med impuls $\vec{P}$ og helisitet s slik

$$\psi(\vec{r}, t) = \psi_+ + \psi_-$$

$$= \sum_{s=\pm 1} \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \sqrt{\frac{Mc^2}{E}} \left[b(\vec{P}, s) u(\vec{P}, s) e^{-\frac{i}{\hbar} P_\mu x^\mu} + d^+(\vec{P}, s) v(\vec{P}, s) e^{\frac{i}{\hbar} P_\mu x^\mu} \right]$$

med

$$\{b(\vec{P}, s), b^+(\vec{P}', s')\} = \delta_{ss'} \delta^3(\vec{P} - \vec{P}')$$

$$\{d(\vec{P}, s), d^+(\vec{P}', s')\} = \delta_{ss'} \delta^3(\vec{P} - \vec{P}')$$

og alle de andre antikommutatorene lik 0.

Kvantiseringsbetingelsene i d) er da oppfylt. (Trengs ikke vises).

Her er $u(\vec{P}, s)$ og $v(\vec{P}, s)$ 4-spinorene for henholdsvis elektroner og positronene.

Energioperatoren for feltet er gitt ved

$$H = \int \psi^\dagger \mathcal{H} \psi d^3r = \int \psi^\dagger i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi d^3r.$$

Finn denne H for det fri elektron-positron feltet uttrykt ved kreasjons- og annihilasjons-operatorene gitt ovenfor.

Oppgave 2

- a) Tegn laveste ordens Feynman-diagram for spredning av et elektron (masse m og ladning e)

i) på et proton (M, e_p) $e^- p \rightarrow e^- p$

ii) på et fast Coulombpotensial $A^0 = -\frac{e_p}{4\pi} \frac{1}{r}$, $A^k = 0$ (Har satt $\epsilon_0=1$ og bruker $\hbar=c=1$).

Tilstandsfunksjonen for et proton kan antas å ha samme form som Dirac-tilstandsfunksjonen for et elektron bare med en annen masse $M \gg m$ og motsatt ladning $e_p = -e > 0$.

- b) Bruk Feynman-reglene til å skrive opp de algebraiske uttrykkene for disse prosessenes spredningsamplituder $S_{fi}^{(i)}$ og $S_{fi}^{(ii)}$ når

energi og impuls for inn- og ut-gående elektron er henholdsvis

$P_1 = (\epsilon_1, \vec{p}_1)$ og $P_2 = (\epsilon_2, \vec{p}_2)$ og for protonet

$P_1 = (E_1, \vec{p}_1)$, $P_2 = (E_2, \vec{p}_2)$.

- c) Vis at til laveste orden i elektron- og proton-impulsene $\vec{p}_1$ og $\vec{p}_2$ ($i = 1, 2$) er

$$S_{fi}^{(i)} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \frac{(-ie^2)}{(\vec{p}_2 - \vec{p}_1)^2} (\chi_2^\dagger \chi_1)(X_2^\dagger X_1) \delta^4(p_2 + p_2 - p_1 - p_1)$$

Her er χ_i og X_i 2-komponentspinorene for elektronet og protonet,

Sammenlikn de to spredningsamplitudene $S_{fi}^{(i)}$ og $S_{fi}^{(ii)}$ med

hverandre.

Regler for Feynman-diagram.I impulsrommet

Ytre linjer:

Elektronlinjer:

$$\begin{array}{c} \nearrow \\ p, s \end{array} \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{m}{E_p} \right)^{\frac{1}{2}} u(p, s) \quad \begin{array}{c} \nearrow \\ p, s \end{array} \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{m}{E_p} \right)^{\frac{1}{2}} \bar{u}(p, s)$$

Positronlinjer:

$$\begin{array}{c} \searrow \\ p, s \end{array} \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{m}{E_p} \right)^{\frac{1}{2}} \bar{v}(p, s) \quad \begin{array}{c} \searrow \\ p, s \end{array} \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{m}{E_p} \right)^{\frac{1}{2}} v(p, s)$$

Fotonlinjer:

$$\begin{array}{c} \cdot \\ \text{wavy} \\ k, \lambda \end{array} \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2\omega_k} \right)^{\frac{1}{2}} \hat{e}_{k\lambda} \quad \begin{array}{c} \cdot \\ \text{wavy} \\ k, \lambda \end{array} \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2\omega_k} \right)^{\frac{1}{2}} \hat{e}_{k\lambda}$$

Ytre felt:

$$\begin{array}{c} p_2 \\ \diagdown \\ \text{X} \Lambda_\mu^{\text{ytre}} \\ \diagup \\ p_1 \end{array} -ie\gamma^\mu A_\mu^{\text{ytre}}(\vec{p}_2 - \vec{p}_1) 2\pi\delta(E_1 - E_2)$$

med $A_\mu^{\text{ytre}}(k) = \int A_\mu^{\text{ytre}}(\vec{r}) e^{i\vec{k}\vec{r}} d^3x$

Indre linjer:

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ p \end{array} \quad \begin{array}{c} \downarrow \\ p \end{array} \quad \frac{i}{(2\pi)^4} \frac{\gamma p + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \quad \text{og} \quad \int d^4p \quad (\epsilon \rightarrow 0)$$

$$\begin{array}{c} \cdot \\ \text{wavy} \\ k \end{array} \quad \begin{array}{c} \cdot \\ \text{wavy} \\ k \end{array} \quad \frac{-i}{(2\pi)^4} g_{\mu\nu} \frac{1}{k^2 + i\epsilon} \quad \text{og} \quad \int d^4k$$

Knuter:

$$\begin{array}{c} p_2, s \\ \diagdown \\ \cdot \\ \diagup \\ p_1, s \end{array} \quad \begin{array}{c} \cdot \\ \text{wavy} \\ k, \lambda \end{array} -ie\gamma^\lambda (2\pi)^4 \delta^4(p_1 - p_2 - k)$$

Dirac-matrisene:

Antikommuteringsregler $\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$

med metrikken $g^{\mu\nu} = \begin{cases} 1 & \text{når } \mu = \nu = 0 \\ -1 & \text{når } \mu = \nu \neq 0 \\ 0 & \text{når } \mu \neq \nu \end{cases}$

I standardrepresentasjonen er

$$\gamma^0 = \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \vec{\gamma} = \beta \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$$

med

$$\vec{\sigma} = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right].$$

Ortogonalitetsrelasjoner for tilstandsspinorene

$$u^+(\vec{p}, s) u(\vec{p}, s') = \frac{E}{mc^2} \delta_{ss'}$$

$$v^+(\vec{p}, s) v(\vec{p}, s') = \frac{E}{mc^2} \delta_{ss'}$$

$$u^+(\vec{p}, s) v(-\vec{p}, s') = 0$$