UNIVERSITETET I TRONDHEIM
NORGES TEKNISKE HØGSKOLE
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Kåre Olaussen
Telefon: 3652

Eksamen i fag 74327 Relativistisk kvantemekanikk
Mandag 3. juni 1991
Tid: 0900–1300

Tillatte hjelpemidler: (Alternativ B): Godkjent lommekalkulator tillatt.
Rottmann, *Mathematische Formelsammlung.*
Barnett and Cronin: *Mathematical Formulae.*
Øgrim, *Størrelser og enheter i fysikken.*

Oppgave 1:

a) Tegn, dersom prosessene er mulige i *QED*, Feynman-diagrammene for alle bidrag av laveste ikke-trivielle orden for prosessene:

1. $e^- \mu^- \to e^- \mu^-$
2. $e^+ \mu^- \to e^+ \mu^-$
3. $e^+ e^- \to \mu^+ \mu^-$
4. $e^- e^- \to \mu^- \mu^-$
5. $e^+ e^- \to \mu^+ \mu^- \gamma$
6. $e^+ \mu^- \to \gamma\gamma$
7. $\mu^+ \mu^- \to \gamma\gamma$
8. $e^+ e^- \to \gamma\gamma\gamma$
9. $\gamma \to e^+ e^-$
10. $\gamma\gamma \to \gamma\gamma$

b) Se nå litt nærmere på prosessen $e^+\gamma \to e^+\gamma$:

1. Tegn Feynman-diagrammene for alle bidrag av laveste ikke-trivielle orden for denne prosessen.
2. Bruk Feynman-reglene i vedlegget til å skrive ned de tilhørende algebraiske uttrykkene for spredningsamplitudene.
3. Se på denne prosessen fra et koordinatsystem der positronet på forhånd er i ro. Finn, som funksjon av energien ω til det innkommende fotonet, den maksimale energien som kan overføres til positronet.

c) Det finnes *QED*-bidrag av orden e^2 til energitettheten i vakuum: (i) Tegn Feynman-diagrammene for disse bidragene, og (ii) bruk Feynman-reglene i vedlegget til å skrive ned de tilhørende algebraiske uttrykkene for disse bidragene.

Oppgave 2:

I denne oppgaven skal vi se på en modell for relativistiske Bosepartikler som er restriktert til en tynn sirkel av omkrets L rundt en magnetisk fluks Φ. Denne modellen er definert ved virkningsintegralet

$$S = \int dt \int_{-L/2}^{L/2} dx \, \{\dot{\varphi}^* \dot{\varphi} - [(\partial_x + ieA)\varphi]^* [(\partial_x + ieA)\varphi]\}, \tag{1}$$

der $A = \Phi/L$ er en konstant, og det komplekse feltet $\varphi(x)$ oppfyller periodisitetsbetingelsen

$$\varphi(x + L) = \varphi(x). \tag{2}$$

a) Hva er bevegelsesligningen for feltet φ?

b) Anta at denne ligningen har egenmoder av formen

$$\varphi(x,t) = C\mathrm{e}^{-i(\omega t - kx)},$$

og bestem de mulige verdiene for k og ω.

c) Bestem de kanonisk konjugerte impulsene Π_φ og Π_{φ^*} til henholdsvis φ og φ^*.

d) Hva er Hamiltonfunksjonen H for systemet uttrykt ved feltene φ, φ^*, Π_φ og Π_{φ^*}?

e) Anta nå at φ-feltet kan utvikles i en Fourier-rekke av formen

$$\varphi(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[C_n a_n \mathrm{e}^{-i(\omega_n t - k_n x)} + C_{-n} b_n^\dagger \mathrm{e}^{i(\omega_{-n} t - k_n x)}\right],$$

der $\omega_n \geq 0$. Hva blir de tilsvarende utviklingene for feltene φ^*, Π_φ og Π_{φ^*}?

f) Bestem konstantene C_n slik at de kanoniske lik-tid kommutatorene

$$[\Pi_\varphi(x,t), \varphi(x',t)] = [\Pi_{\varphi^*}(x,t), \varphi^*(x',t)] = -i\delta_{per}(x - x') \equiv -\frac{i}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{2\pi i(x-x')n/L}$$

blir oppfylt når settet $\left\{a_n, a_n^\dagger, b_n, b_n^\dagger \mid n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\right\}$ oppfyller standard kommuteringsregler for kreasjons- og annihilasjons-operatorer.

g) Hva er Hamiltonfunksjonen H for systemet uttrykt på normalordnet form ved kreasjons- og annihilasjonsoperatorene $\left\{a_n, a_n^\dagger, b_n, b_n^\dagger \mid n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\right\}$?

h) Grunntilstandsenergien E_0 for systemet er formelt et uttrykk av formen

$$E_0 = N \sum_{n=-\infty}^{\infty} \omega_n.$$

(i) Hva er konstanten N? (ii) Vis at E_0 er en symmetrisk og periodisk funksjon av fluksen Φ, og (iii) bestem denne perioden.

i) For å kunne operere med endelige uttrykk definerer vi E_0 som

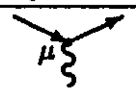
$$E_0 \equiv \lim_{\tau \to 0+} -N \frac{\partial}{\partial \tau} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\tau \omega_n}.$$

Bestem fra dette uttrykket hvilke verdier for Φ som fører til lavest verdi på E_0.

Vedlegg 1:

1 Feynmanregler for $-iT_{fi}$:

1. Utgående partikler			2. Innkommende partikler		
Type partikler	Grafisk symbol	Algebraisk uttrykk	Type partikler	Grafisk symbol	Algebraisk uttrykk
$e^-, \mu^-, \cdots$	$\bullet\!\!\longrightarrow p, s$	$\bar{u}(p, s)$	$e^-, \mu^-, \cdots$	$p, s \longrightarrow\!\!\bullet$	$u(p, s)$
$e^+, \mu^+, \cdots$	$\bullet\!\!\longleftarrow p, s$	$v(p, s)$	$e^+, \mu^+, \cdots$	$p, s \longleftarrow\!\!\bullet$	$\bar{v}(p, s)$
γ (foton)	$\bullet\!\sim\!\sim\!\sim k, r$	$e_\mu(k, r)^*$	γ (foton)	$k, r \sim\!\sim\!\sim\!\bullet$	$e_\mu(k, r)$
Uladet spinn−0	$\bullet \cdots\cdots k$	1	Uladet spinn−0	$k \cdots\cdots \bullet$	1

3. Propagatorer			4. Vekselvirkningsknuter		
Type partikler	Grafisk symbol	Algebraisk uttrykk	V.virkning $\mathcal{L}_{int}$	Grafisk symbol	Algebraisk uttrykk
$e^\pm, \mu^\pm, \cdots$	$\bullet\!\xrightarrow{p}\!\bullet$	$\dfrac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$	$e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$		$ie\gamma^\mu$
γ (foton)	$\mu \overset{k}{\sim\!\sim\!\sim} \nu$	$\dfrac{-i\eta_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon}$	$-\dfrac{1}{3!}\mu\varphi^3$		$-i\mu$
Uladet spinn−0	$\bullet\cdots \overset{k}{\cdots}\cdots\bullet$	$\dfrac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon}$	$-\dfrac{1}{4!}\lambda\varphi^4$		$-i\lambda$

i) Konservering av firer-impuls i hver knute.

ii) Integrasjon $\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}$ over hver ubestemt impuls.

iii) Faktor -1 for hver lukket fermionsløyfe.

iv) Relativt minustegn mellom diagrammer som adskiller seg ved ombytte av to fermioner.

v) Kombinatorisk faktor $1/S$, der S er diagrammets symmetritall.