

UNIVERSITETET I TRONDHEIM
NORGES TEKNISKE HØGSKOLE
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:

Navn: Kåre Olaussen

Telefon: 3652

Kontinuasjonseksamen i
Fag 74327 Relativistisk kvantemekanikk
Fredag 23. august 1991
Tid: 0900–1300

Tillatte hjelpemidler: (Alternativ B): Godkjent lommekalkulator tillatt.

Rottmann, *Mathematische Formelsammlung*.

Barnett and Cronin: *Mathematical Formulae*.

Øgrim, *Størrelser og enheter i fysikken*.

Oppgave 1:

Benytt

$$\vec{E}(\vec{x}_0; a) \equiv \frac{1}{(2\pi a^2)^{3/2}} \int d^3x \vec{E}(\vec{x}) e^{-[(\vec{x}-\vec{x}_0)/a]^2/2},$$

$$\vec{B}(\vec{x}_0; a) \equiv \frac{1}{(2\pi a^2)^{3/2}} \int d^3x \vec{B}(\vec{x}) e^{-[(\vec{x}-\vec{x}_0)/a]^2/2},$$

som uttrykk for de fri elektromagnetiske feltene midlet over et volum av lineær dimensjon a , og beregn vakuum-forventningsverdiene F_i til disse størrelsene:

a)

$$F_1 = \langle 0 | \vec{E}(\vec{x}_0; a) \cdot \vec{E}(\vec{x}_0; a) | 0 \rangle$$

b)

$$F_2 = \langle 0 | \vec{B}(\vec{x}_0; a) \cdot \vec{B}(\vec{x}_0; a) | 0 \rangle$$

c)

$$F_3 = \langle 0 | \vec{E}(\vec{x}_0; a) \cdot \vec{B}(\vec{x}_0; a) | 0 \rangle$$

Fourierutviklingen av de elektromagnetiske feltene står oppgitt i vedlegget.

Oppgave 2:

Mandelstam-invariantene for en 2-partikkel $\rightarrow$ 2-partikkel spredningsprosess (der de to innkommende partiklene har masser m_1, m_2 og firer-impulser p_1, p_2 , og de to utgående partiklene har masser m'_1, m'_2 og firer-impulser p'_1, p'_2) er definert som

$$s = (p_1 + p_2)^2 = (p'_1 + p'_2)^2,$$

$$t = (p_1 - p'_1)^2 = (p_2 - p'_2)^2,$$

$$u = (p_1 - p'_2)^2 = (p_2 - p'_1)^2.$$

- a) Vis at kombinasjonen

$$s + t + u$$

bare avhenger av massene til partiklene som er involvert i spredningsprosessen (altså ikke av firer-impulsene).

- b) I massesentersystemet, definert ved at

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 = 0,$$

kan energiene E_1, E_2, E'_1, E'_2 til de involverte partiklene uttrykkes ved s og massene m_1, m_2, m'_1, m'_2 . Finn denne sammenhengen.

Oppgave 3:

- a) Tegn, dersom prosessene er mulige i QED, Feynman-diagrammene for alle bidrag av laveste ikke-trivielle orden for prosessene:

1. $e^- \mu^+ \rightarrow e^- \mu^+$
2. $e^- \mu^+ \rightarrow e^+ \mu^-$
3. $e^- e^+ \rightarrow \mu^- \mu^+$
4. $e^- e^+ \rightarrow e^- e^+$
5. $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \gamma$
6. $\mu^- \rightarrow e^+ \gamma$
7. $\gamma \gamma \rightarrow \gamma$
8. $\gamma \gamma \rightarrow e^+ e^-$
9. $\gamma \gamma \rightarrow e^- \mu^+$
10. $\gamma \gamma \rightarrow \gamma \gamma$

- b) Se nå litt nærmere på prosessen $e^+ e^- \rightarrow e^+ e^- \mu^+ \mu^-$:

1. Tegn Feynman-diagrammene for alle bidrag av laveste ikke-trivielle orden til denne prosessen.
2. Velg ut ett av disse diagrammene, og bruk Feynman-reglene i vedlegget til å skrive ned det tilhørende algebraiske uttrykket for bidraget til spredningsamplituden.
3. Hva er den *minste* energien som positronet må ha for at prosessen skal kunne skje:
 - (a) I massesentersystemet (dvs. når elektronet og positronet i begynnelsestilstanden beveger seg rett mot hverandre med samme energi)?
 - (b) Når elektronet i begynnelsestilstanden er i ro (dvs. i laboratoriesystemet til dette)?

1 Fourierutvikling av de fri elektromagnetiske feltene

Vi har (i det 'naturlige' enhets-systemet)

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{A}(\vec{x}, t),$$

$$\vec{B}(\vec{x}, t) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{x}, t),$$

med Fourierutviklingen

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \sum_{\vec{r}} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{1}{2|\vec{k}|}} \left[a_{\vec{r}}(\vec{k}) \vec{e}_{\vec{r}}(\vec{k}) e^{-ikx} + a_{\vec{r}}(\vec{k})^\dagger \vec{e}_{\vec{r}}(\vec{k})^* e^{ikx} \right],$$

der

$$[a_{\vec{r}}(\vec{k}), a_{\vec{s}}(\vec{k}')^\dagger] = \delta_{rs} \delta(\vec{k} - \vec{k}'), \quad \sum_{\vec{r}} e_{\vec{r}}^i(\vec{k})^* e_{\vec{r}}^j(\vec{k}) = \delta^{ij} - k^i k^j / \vec{k}^2.$$

2 Feynmanregler for $-iT_{fi}$:

1. Utgående partikler			2. Innkommende partikler		
Type partikler	Grafisk symbol	Algebraisk uttrykk	Type partikler	Grafisk symbol	Algebraisk uttrykk
$e^-, \mu^-, \dots$	$\longrightarrow p, s$	$\bar{u}(p, s)$	$e^-, \mu^-, \dots$	$p, s \longrightarrow$	$u(p, s)$
$e^+, \mu^+, \dots$	$\longleftarrow p, s$	$v(p, s)$	$e^+, \mu^+, \dots$	$p, s \longleftarrow$	$\bar{v}(p, s)$
γ (foton)	$\sim k, r$	$e_\mu(\vec{k}, r)^*$	γ (foton)	$k, r \sim$	$e_\mu(k, r)$
Uladet spinn-0	$\dots\dots\dots k$	1	Uladet spinn-0	$k \dots\dots\dots$	1

3. Propagatorer			4. Vekselvirkningsknuter		
Type partikler	Grafisk symbol	Algebraisk uttrykk	V.virkning $\mathcal{L}_{int}$	Grafisk symbol	Algebraisk uttrykk
$e^\pm, \mu^\pm, \dots$	$\xrightarrow{p}$	$\frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$	$e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$	$\mu \begin{array}{c} \swarrow \searrow \\ \downarrow \end{array}$	$ie\gamma^\mu$
γ (foton)	$\mu \begin{array}{c} \nearrow \searrow \\ \downarrow \end{array}$	$\frac{-i\eta_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon}$	$-\frac{1}{3!}\mu\varphi^3$	$\begin{array}{c} \dots \dots \dots \\ \downarrow \end{array}$	$-i\mu$
Uladet spinn-0	$\dots\dots\dots k$	$\frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon}$	$-\frac{1}{4!}\lambda\varphi^4$	$\begin{array}{c} \dots \dots \dots \\ \times \end{array}$	$-i\lambda$

- Konservering av firer-impuls i hver knute.
- Integrasjon $\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}$ over hver ubestemt impuls.
- Faktor -1 for hver lukket fermionsløyfe.
- Relativt minustegn mellom diagrammer som adskiller seg ved ombytte av to fermioner.
- Kombinatorisk faktor $1/S$, der S er diagrammets symmetritall.