

UNIVERSITETET I TRONDHEIM
NORGES TEKNISKE HØGSKOLE
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
F. Bakke
Tlf. 3649

EKSAMEN I FAG 74327 RELATIVISTISK KVANTEMEKANIKK

Fredag 29. mai 1992

kl.0900-1300

Tillatte hjelpemidler: Rottmann: Mathematische Formelsammlung
Barnett and Cronin: Mathematical Formulae
Godkjent kalkulator

Endel formler og konstanter er gitt i eget vedlegg.

Oppgave 1

- a) Skriv opp Dirac-likningen for et elektron med ladning e i et elektromagnetisk felt med potensial $A^\mu = (\frac{1}{c} \phi, \vec{A})$ og redegjør for de størrelsene som inngår.
- b) Finn de fire løsningene som i standardrepresentasjonen beskriver frie elektroner i ro, ($\vec{p}=0$) med henholdsvis positiv og negativ energi ($\pm E_p$) og spinn "opp" henholdsvis "ned" langs z-aksen.
- c) Sammenhengen mellom tilstandsfunksjonene i to inertialsystem er gitt ved

$$\Psi(\vec{r}', t') = S \Psi_0(\vec{r}, t).$$

For en Lorentz-transformasjon med hastigheten v langs z-aksen er

$$S^L = \cosh \frac{\omega}{2} + \gamma^0 \gamma^3 \sinh \frac{\omega}{2}$$

med

$$\cosh \frac{\omega}{2} = \sqrt{\frac{E+mc^2}{2mc^2}} \quad \text{og} \quad \sinh \frac{\omega}{2} = \sqrt{\frac{E-mc^2}{2mc^2}} = \cosh \frac{\omega}{2} \cdot \frac{c|\vec{p}|}{E+mc^2}.$$

For en dreining en vinkel ϑ om y-aksen er

$$S^D = \cos \frac{\vartheta}{2} + \gamma^3 \gamma^1 \sin \frac{\vartheta}{2}.$$

Finn tilstandsfunksjonen for et fritt elektron med positiv energi og positiv helisitet og hvor impulsens retning $\vec{p} = (p_x, 0, p_z)$

danner vinkelen ϑ med z-aksen.

- d) Tegn opp Feynman-diagrammene til laveste orden for elastisk elektron-positron-spredning $e^- + e^+ \rightarrow e^- + e^+$ og skriv opp tilhørende spredningsmatrise ved hjelp av vedlagte regler for Feynman-diagram.
- e) Et av diagrammene gir et bidrag til spredningsmatrisen av formen

$$\frac{ie^2}{(2\pi)^2} \left(\frac{m}{E}\right)^2 \frac{(\bar{u}_1' \gamma^\mu u_1)(\bar{v}_2 \gamma_\mu v_2')}{(p_1' - p_1)^2} \quad (\text{Her er satt } \hbar=c=1)$$

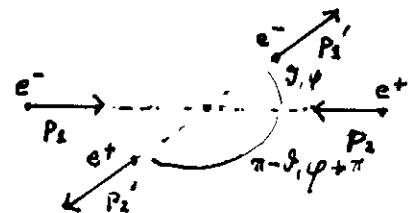
p_1 og u_1 er 4-impuls og Dirac-spinor for inngående elektron

p_1' og u_1' tilsvarende for utgående elektron.

v_2 og v_2' er Dirac-spinoren for henholdsvis inn og utgående positron.

$$\bar{u}_1 = u_1^\dagger \gamma^0.$$

Regn ut leddet med γ^1 i dette bidraget i tyngdepunktsystemet når både elektron og positron har positiv helisitet i både inn- og utgående tilstander.



For et elektron med impuls $\vec{p}$ i retning θ, ϕ og positiv helisitet er tilstandsfunksjonen

$$\Psi = u(\vec{p}, +) \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} e^{i(\vec{p}\vec{r} - Et)}$$

med

$$u(\vec{p}, +) = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \begin{pmatrix} \cos \theta/2 e^{-i\phi/2} \\ \sin \theta/2 e^{i\phi/2} \\ \frac{|\vec{p}|}{E+m} \cos \theta/2 e^{-i\phi/2} \\ \frac{|\vec{p}|}{E+m} \sin \theta/2 e^{i\phi/2} \end{pmatrix}$$

og for et positron

$$\Psi^c = v(\vec{p}, +) \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-i(\vec{p}\vec{r} - Et)}$$

$$v(\vec{p}_1+) = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \begin{bmatrix} -\frac{|\vec{p}|}{E+m} \sin \vartheta/2 e^{-i\phi/2} \\ \frac{|\vec{p}|}{E+m} \cos \vartheta/2 e^{i\phi/2} \\ \sin \vartheta/2 e^{-i\phi/2} \\ -\cos \vartheta/2 e^{i\phi/2} \end{bmatrix} .$$

Oppgave 2

Lagrangefunksjonen for et fritt elektromagnetisk strålingsfelt med potensial $A^\mu = (\frac{1}{c} \phi, \vec{A})$ er $(\mu = 0, 1, 2, 3)$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2\mu_0} K^{\mu\nu\rho\sigma} (\partial_\mu A_\nu) (\partial_\rho A_\sigma) \quad \text{med} \quad K^{\mu\nu\rho\sigma} = g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} - g^{\nu\rho} g^{\mu\sigma} .$$

- a) Finn feltlikningen uttrykt ved feltstyrkene $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$
hvor $F^{0k} = -\frac{1}{c} E^k$ og $F^{ik} = +\epsilon^{ik\ell} B_\ell$.

Redegjør for at de elektromagnetiske feltstyrkene er gauge-invariante og at en kan velge en gauge slik at potensialet tilfredstiller Lorentz-betingelsen $\partial_\mu A^\mu = 0$.

- b) Energitettheten i feltet er $\mathcal{E} = \pi^\mu \dot{A}_\mu - \mathcal{L}$.

Vis at feltets totale energi er

$$H = \int \mathcal{E} d^3x = -\frac{1}{2\mu_0} \int d^3x \left[\frac{1}{c^2} \dot{A}_\mu \dot{A}^\mu + \partial_k A_\mu \partial_k A^\mu \right]$$

når $\phi = 0$ i strålingsfeltet.

$\pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\mu}$ er den kanoniske impulsen.

Potensialet kan fourierutvikles etter planbølgeløsninger

$$A^\mu(\vec{r}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left(\frac{\hbar}{2\epsilon_0 \omega_k} \right)^{1/2} [a^\mu(k) e^{-ikx} + a^{\mu\dagger}(k) e^{ikx}] = A^{\mu(+)} + A^{\mu(-)} .$$

For 4-vektoren $k = (\frac{\omega_k}{c}, \vec{k})$ gjelder $k^2 = (\frac{\omega_k}{c})^2 - (\vec{k})^2 = 0$.

Hvilken betingelse på amplitudene $a^\mu(k)$ gir Lorentzbetingelsen ?

Feltenergien kan nå skrives

$$H = -\frac{1}{2} \int d^3k \hbar \omega_k (a_\mu(k) a^{\mu\dagger}(k) + a_\mu^\dagger(k) a^\mu(k)) .$$

- c) Feltet kan kvantiseres ved at en lar amplitudene bli operatorer som oppfyller kommuteringsreglene

$$[a^\mu(k), a^{\nu+}(k')] = -g^{\mu\nu} \delta(k-k') \quad \text{for } k_0=k'_0$$

$$[a^\mu(k), a^\nu(k')] = 0 = [a^{\mu+}(k), a^{\nu+}(k')].$$

Vis at dette gir den kanoniske kommuteringsregelen

$$[A_\mu(x), \dot{A}_\nu(y)] = -i\hbar g_{\mu\nu} \delta(\vec{x}-\vec{y}) \quad \text{for } t_x = t_y.$$

- d) Kommutatoren ovenfor er ikke konsistent med Lorentzbetingelsen om denne forstås som en generell operatorlikning. Kommenter dette!

Lorentzbetingelsen oppfylles ved bare å tillate tilstander $|\Psi\rangle$ som tilfredstiller $\partial_\mu A^{\mu(+)}|\Psi\rangle = 0$. Vis dette!

Hvilken sammenheng gir dette mellom bølgetall og amplitude for en plan harmonisk bølge i z-retningen $k = [\frac{\omega}{c}k, 0, 0, k^z]$?

Vis at Lorentzbetingelsen fører til at energien alltid blir positiv i slike tilstander.

Regler for Feynman-diagram.

I impulsrommet

(Har satt $\hbar = c = 1$)

Ytre linjer:

Elektronlinjer:

$$\begin{array}{c} \nearrow \\ p, s \end{array} \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{m}{E_p} \right)^{\frac{1}{2}} u(p, s) \quad \begin{array}{c} \nearrow \\ p, s \end{array} \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{m}{E_p} \right)^{\frac{1}{2}} \bar{u}(p, s)$$

Positronlinjer:

$$\begin{array}{c} \searrow \\ p, s \end{array} \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{m}{E_p} \right)^{\frac{1}{2}} \bar{v}(p, s) \quad \begin{array}{c} \searrow \\ p, s \end{array} \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{m}{E_p} \right)^{\frac{1}{2}} v(p, s)$$

Fotonlinjer:

$$\begin{array}{c} \text{wavy} \\ k, \lambda \end{array} \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{2\omega_k} \right)^{\frac{1}{2}} \hat{e}_{k\lambda} \quad \begin{array}{c} \text{wavy} \\ k, \lambda \end{array} \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{2\omega_k} \right)^{\frac{1}{2}} \hat{e}_{k\lambda}$$

Ytre felt:

$$\begin{array}{c} p_2 \\ \diagdown \\ \text{X} \text{ ytre} \\ \diagup \\ p_1 \end{array} \quad -ie\gamma^\mu A_\mu^{\text{ytre}}(\vec{p}_2 - \vec{p}_1) 2\pi\delta(E_1 - E_2)$$

med $A_\mu^{\text{ytre}}(k) = \int A_\mu^{\text{ytre}}(\vec{r}) e^{i\vec{k}\vec{r}} d^3x$

Indre linjer:

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ p \end{array} \quad \begin{array}{c} \downarrow \\ p \end{array} \quad \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{\gamma p + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \quad \text{og} \quad \int d^4p \quad (\epsilon \rightarrow 0)$$

$$\begin{array}{c} \text{wavy} \\ k \end{array} \quad \frac{-1}{(2\pi)^4} g_{\mu\nu} \frac{1}{k^2 + i\epsilon} \quad \text{og} \quad \int d^4k$$

Knuter:

$$\begin{array}{c} p_2, s \\ \diagdown \\ \text{X} \\ \diagup \\ p_1, s \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{wavy} \\ k, \lambda \end{array} \quad -ie\gamma^\lambda (2\pi)^4 \delta^4(p_1 - p_2 - k)$$

Lukket fermionering:



ekstra faktor -1 .

Flere diagram til samme prosess adderes med $(-1)^{P_{\text{ferm}}}$ foran hvor P_{ferm} = antall permutasjoner av ytre fermioner i forhold til valgt utgangsdigram.

Dirac-matrisene:

Antikommuteringsregler $\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$

med metrikken $g^{\mu\nu} = \begin{matrix} 1 & \text{når} & \mu = \nu = 0 \\ -1 & \text{når} & \mu = \nu \neq 0 \\ 0 & \text{når} & \mu \neq \nu \end{matrix}$

I standardrepresentasjonen er

$$\gamma^0 = \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \vec{\gamma} = \beta \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$$

med

$$\vec{\sigma} = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right)$$

Spinn og helisitetsoperatorene

$$\vec{S} = \frac{\hbar}{2} \vec{\Sigma}, \quad \vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}$$

$$\Sigma_p = \frac{\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|}$$

Ortogonalitetsrelasjoner for tilstandsspinorene

$$u^\dagger(\vec{p}, s) u(\vec{p}, s') = \frac{E}{mc^2} \delta_{ss'}$$

$$v^\dagger(\vec{p}, s) v(\vec{p}, s') = \frac{E}{mc^2} \delta_{ss'}$$

$$u^\dagger(\vec{p}, s) v(-\vec{p}, s') = 0$$