

UNIVERSITETET I TRONDHEIM
NORGES TEKNISKE HØGSKOLE
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
F. Bakke
Tlf. 3649

EKSAMEN I FAG 74327 RELATIVISTISK KVANTEMEKANIKK

Lørdag 12. juni 1993

kl. 0900-1300

Tillatte hjelpemidler: Rottmann: Mathematische Formelsammlung
Barnett and Cronin: Mathematical Formulae
Godkjent kalkulator

Oppgave 1

- a) Skriv opp Dirac-likningen for et elektron med ladning $e = -|e|$ i et elektromagnetisk felt $A^\mu = (\frac{1}{c}\phi, \vec{A})$ og redegjør for de størrelsene som inngår.
- b) Skriv opp tilsvarende likning for et positron med ladning $e_1 = +|e|$ og vis at en mellom tilstandene for elektronet, ψ_e , og for positronet, ψ_p , har en sammenheng
- $$\psi_e = C \psi_p^*$$
- og bestem C når en bruker standardrepresentasjonen for Dirac-matrisene γ^μ .
- c) Finn de to løsningene som i standardrepresentasjonen beskriver frie elektroner i ro ($\vec{p}=0$) med negativ energi ($E = -mc^2$) og spinn "opp" henholdsvis "ned" langs z-aksen.
- d) Finn de positronløsningene som ifølge b) følger fra disse og angi deres energi og spinnretning.

Oppgave 2

- a) Et elektron spredes elastisk mot et fast elektrostatisk Coulombpotensial

$$\phi(\vec{r}) = -\frac{Ze}{4\pi r}$$

Tegn laveste ordens Feynman diagram og vis at spredningsamplituden blir (benytter $\hbar=c=\epsilon_0=1$)

$$S_{e\,fi}^{(1)} = i \frac{Ze^2}{(2\pi)^2} \frac{m}{\sqrt{E_f E_i}} \frac{\bar{u}_f \gamma^0 u_i}{|\vec{p}_f - \vec{p}_i|^2} \delta(E_f - E_i)$$

Her er $u_i = u(\vec{p}_i, s_i)$ spinoren for et elektron med positiv energi E_i , impuls $\vec{p}_i$ og helisitet s_i

$$\bar{u} = u^\dagger \gamma^0$$

- b) Vis at det differensielle spredningstverrsnitt for prosessen da blir til første orden gitt ved

$$\frac{d\sigma_e}{d\Omega}^{(1)} = 4 \left(\frac{Ze^2}{4\pi} \right)^2 \frac{m^2}{|\vec{q}|^4} \left| \bar{u}_f \gamma^0 u_i \right|^2 \quad \text{med} \quad \vec{q} = \vec{p}_f - \vec{p}_i$$

- b) Vis at $P_{\pm} = \frac{m \pm \not{\vec{p}}}{2m}$ er projeksjonsoperator for løsninger av Dirac-likningen for fri partikler med henholdsvis positiv og negativ energi og benytt dette til å regne ut til laveste orden det differensielle spredningstverrsnitt for upolariserte elektroner mot Coulomb potensialet ovenfor.

- c) Et positron spredes mot det samme Coulombpotensialet. Tegn laveste ordens Feynman-diagram. Skriv opp spredningsmatrisene $S_{p\,fi}^{(1)}$ og

regn ut det tilhørende differensielle spredningstverrsnitt $\frac{d\sigma_p^{(1)}}{d\Omega}$ for upolariserte positroner.

Finn forholdet mellom positron-og elektron-tverrsnittene

$$\frac{d\sigma_p^{(1)}}{d\Omega} / \frac{d\sigma_e^{(1)}}{d\Omega}$$

- d) Tegn annen ordens diagram for de to prosessene og redegjør kort for at forholdet mellom de to tverrsnittene til annen orden

$$\frac{d\sigma_p^{(2)}}{d\Omega} / \frac{d\sigma_e^{(2)}}{d\Omega}$$

ikke blir det samme som i c).

Regler for Feynman-diagram.I impulsrommet(Har satt $\hbar = c = 1$)

Ytre linjer:

Elektronlinjer:

$$\begin{array}{c} \nearrow \\ p, s \end{array} \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{m}{E_p} \right)^{\frac{1}{2}} u(p, s) \quad \begin{array}{c} \nwarrow \\ p, s \end{array} \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{m}{E_p} \right)^{\frac{1}{2}} \bar{u}(p, s)$$

Positronlinjer:

$$\begin{array}{c} \nwarrow \\ p, s \end{array} \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{m}{E_p} \right)^{\frac{1}{2}} \bar{v}(p, s) \quad \begin{array}{c} \nearrow \\ p, s \end{array} \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{m}{E_p} \right)^{\frac{1}{2}} v(p, s)$$

Fotonlinjer:

$$\begin{array}{c} \text{wavy} \\ k, \lambda \end{array} \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2\omega_k} \right)^{\frac{1}{2}} \hat{e}_{k\lambda} \quad \begin{array}{c} \text{wavy} \\ k, \lambda \end{array} \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2\omega_k} \right)^{\frac{1}{2}} \hat{e}_{k\lambda}$$

Ytre felt:

$$\begin{array}{c} p_2 \\ \diagdown \\ \text{X} \\ \diagup \\ p_1 \end{array} A_\mu^{\text{ytre}} \quad -ie\gamma^\mu A_\mu^{\text{ytre}} (\vec{p}_2 - \vec{p}_1) \quad 2\pi\delta(E_1 - E_2)$$

med $A_\mu^{\text{ytre}}(k) = \int A_\mu^{\text{ytre}}(\vec{r}) e^{i\vec{k}\vec{r}} d^3x$

Indre linjer:

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ p \end{array} \quad \begin{array}{c} \downarrow \\ p \end{array} \quad \frac{i}{(2\pi)^4} \frac{\gamma p + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \quad \text{og} \quad \int d^4p \quad (s \rightarrow 0)$$

$$\begin{array}{c} \text{wavy} \\ k \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{wavy} \\ k \end{array} \quad \frac{-i}{(2\pi)^4} g_{\mu\nu} \frac{1}{k^2 + i\epsilon} \quad \text{og} \quad \int d^4k$$

Knuter:

$$\begin{array}{c} p_2, s \\ \diagdown \\ \text{X} \\ \diagup \\ p_1, s \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{wavy} \\ k, \lambda \end{array} \quad -ie\gamma^\lambda (2\pi)^4 \delta^4(p_1 - p_2 - k)$$

Lukket fermionering:



ekstra faktor - 1

Flere diagram til samme prosess adderes med $(-1)^{P_{\text{ferm}}}$ foran hvor P_{ferm} = antall permutasjoner av ytre fermioner i forhold til valgt utgangsdigram.

Dirac-matrisene:Antikommuteringsregler $\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$ med metrikken $g^{\mu\nu} = \begin{cases} 1 & \text{når } \mu = \nu = 0 \\ -1 & \text{når } \mu = \nu \neq 0 \\ 0 & \text{når } \mu \neq \nu \end{cases}$

I standardrepresentasjonen er

$$\gamma^0 = \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \vec{\gamma} = \beta \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$$

med

$$\vec{\sigma} = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right]$$

Spinn og helisitetsoperatorene

$$\vec{S} = \frac{\hbar}{2} \vec{\Sigma}, \quad \vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}$$

$$\Sigma_P = \frac{\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|}$$

Ortogonalitetsrelasjoner for tilstandsspinorene

$$u^+(\vec{p}, s) u(\vec{p}, s') = \frac{E}{mc^2} \delta_{ss'}, \quad \bar{u}(\vec{p}, s) u(\vec{p}, s') = \delta_{ss'}$$

$$v^+(\vec{p}, s) v(\vec{p}, s') = -\frac{E}{mc^2} \delta_{ss'}, \quad \bar{v}(\vec{p}, s) v(\vec{p}, s') = -\delta_{ss'}$$

$$u^+(\vec{p}, s) v(-\vec{p}, s') = 0, \quad \bar{u}(\vec{p}, s) v(\vec{p}, s') = 0$$

$$\bar{u}(\vec{p}, s) = u^+(\vec{p}, s) \gamma^0$$

Fullstendighetsrelasjon

$$\sum_{s=1}^2 [u_\alpha(\vec{p}, s) \bar{u}_\beta(\vec{p}, s) - v_\alpha(\vec{p}, s) \bar{v}_\beta(\vec{p}, s)] = \delta_{\alpha\beta}$$

Sporformler

$$\not{p} = \gamma^\mu p_\mu$$

$$\text{Sp} 1 = 4$$

$$\text{Sp}(\gamma_\mu \gamma_\nu) = 4g_{\mu\nu}$$

$$\text{Sp}(\gamma_\kappa \gamma_\lambda \gamma_\mu \gamma_\nu) = 4(g_{\kappa\lambda} g_{\mu\nu} - g_{\kappa\mu} g_{\lambda\nu} + g_{\kappa\nu} g_{\lambda\mu})$$

mens sporet av et produkt med et ulike antall γ -matriser blir 0.