UNIVERSITETET I TRONDHEIM
NORGES TEKNISKE HØGSKOLE
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Alex Hansen
Tlf. 3649

EKSAMEN I FAG 74327 RELATIVISTISK KVANTEMEKANIKK
Fredag 10. juni 1994
kl. 0900–1400

Tillatte hjelpemidler: Rottmann: Matematische Formelsammlung
Barnett and Cronin: Mathematical Formulae
Godkjent kalkulator

Oppgave 1

a) Vi begynner med å se på førstekvantiserte (d.v.s. *ikke* feltkvantiserte) Klein–Gordon partikler med masse m og ladning $\pm e$ hvor $e > 0$. Disse kan beskrives ved Lagrange tettheten $\mathcal{L} = (\partial^\mu \phi^*)(\partial_\mu \phi) - m^2 \phi^* \phi$. Utled bevegelseligningene for disse partiklene.

b) Vis at $\mathcal{L}$ er invariant under transformasjonen $\phi^*(x) \to e^{-ie\epsilon}\phi^*(x)$ og $\phi(x) \to e^{ie\epsilon}\phi(x)$ hvor ϵ er en konstant. Bruk Nöthers teorem til å utlede den korresponderende bevarte firerstrømmen $j^\mu = ie\epsilon[(\partial^\mu \phi^*)\phi - \phi^*(\partial^\mu \phi)]$. Hva er den korresponderende Nötherladning, og vis hvordan vi kan assosiere ϕ og ϕ^* med motsatt ladete partikler.

c) Klein–Gordon partiklene vekselvirker med et elektromagnetisk felt A^μ. Denne vekselvirkningen bygges inn i Lagrangetettheten gjennom minimal kobling, $\partial^\mu \phi^* \to (\partial^\mu + ieA^\mu)\phi^*$ og $\partial^\mu \phi \to (\partial^\mu - ieA^\mu)\phi$. Vis at denne nye Lagrangetettheten er invariant under transformasjonen $\phi^*(x) \to e^{-ie\epsilon(x)}\phi^*(x)$ og $\phi(x) \to e^{ie\epsilon(x)}\phi(x)$, hvor $\epsilon(x)$ er en funksjon av x hvis vi definerer en samtidig transformasjon av feltet A^μ. Hva er denne transformasjonen?

d) Finn Nötherstrømmen nå når A^μ ikke er null, og ϵ kan være en funksjon av x. Hva er $\partial_\mu j^\mu$ nå? Hvilket krav må man legge på $\epsilon(x)$ for at Nötherstrømmen skal være bevart?

Oppgave 2

a) Feynman propagatoren $iS_F(x_2, x_1)$, den avanserte Greens funksjon $K_{adv}(x_2, x_1)$ og den retarderte Greens funksjon $K_{ret}(x_2, x_1)$ for Dirac partikler er alle løsninger av ligningen $(i\not\partial_2 - m)K(x_2, x_1) = i\delta^{(4)}(x_2 - x_1)$. Hva er forskjellen på dem?

b) Feynman propagatoren kan uttrykkes

$$iS_F(x_2, x_1) = \int \frac{d^3\vec{p}}{2p^0(2\pi)^3}\left[\theta(t_2 - t_1)(\not p + m)e^{-ip(x_2 - x_1)} - \theta(t_1 - t_2)(\not p - m)e^{+ip(x_2 - x_1)}\right].$$

Vis at denne oppfyller ligningen $(i\not\partial_2 - m)S_F(x_2, x_1) = \delta^{(4)}(x_2 - x_1)$.

c) Feynman propagatoren for Dirac partikler i et ytre elektromagnetisk felt er en løsning av ligningen $(i\not\partial_2 - e\not A(x_2) - m)S_A(x_2, x_1) = \delta^{(4)}(x_2 - x_1)$, og kan relateres til Feynman propagatoren $S_F(x_2, x_1)$ gjennom integral ligningen

$$S_A(x_2, x_1) = S_F(x_2, x_1) + e\int d^4x S_F(x_2, x)\not A(x)S_A(x, x_1).$$

Utled denne og vis hvordan denne ligningen leder til en perturbativ ekspansjon i potenser av e. (Hint: $S_F(x_2, x_1)(-i\overleftarrow{\not\partial}_1 - m) = \delta(x_2 - x_1)$.)

Oppgave 3

a) Skriv opp alle Feynman diagram som til laveste og nest laveste orden beskriver prosessen $\gamma e^+ \to \gamma e^+$.

b) Benytt Feynman reglene til å bestemme Feynman amplituden $\mathcal{M}$ til laveste orden for denne prosessen.

Vedlegg 1

Regler for Feynman-diagram.

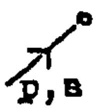
I impulsrommet

(Har satt $\hbar = c = 1$)

TIDS RETNING

Ytre linjer:

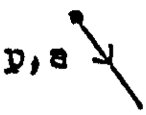
Elektronlinjer:



$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{m}{E_p}\right)^{\frac{1}{2}} u(p,s)$

$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{m}{E_p}\right)^{\frac{1}{2}} \bar{u}(p,s)$

Positronlinjer:



$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{m}{E_p}\right)^{\frac{1}{2}} \bar{v}(p,s)$

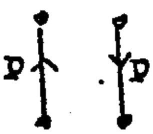
$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{m}{E_p}\right)^{\frac{1}{2}} v(p,s)$

Fotonlinjer:

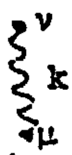
$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{2\omega_k}\right)^{\frac{1}{2}} \hat{e}_{k\lambda}$

$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{2\omega_k}\right)^{\frac{1}{2}} \hat{e}_{k\lambda}$

Indre linjer:

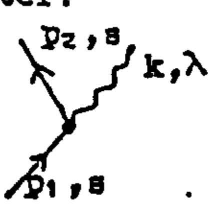


$\frac{i}{(2\pi)^4} \frac{\gamma p + m}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}$ og $\int d^4p$ $\quad (\varepsilon \to 0)$



$\frac{-i}{(2\pi)^4} g_{\mu\nu} \frac{1}{k^2 + i\varepsilon}$ og $\int d^4k$

Knuter:



$-ie\gamma^\lambda (2\pi)^4 \, \delta^4(p_1 - p_2 - k)$

Lukket fermionering:  ekstra faktor -1.

Flere diagram til samme prosess adderes med $(-1)^{P_{ferm}}$ foran hvor P_{ferm} = antall permutasjoner av ytre fermioner i forhold til valgt utgangsdiagram

Vedlegg 2

Dirac-matrisene:

Antikommuteringsregler $\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$

med metrikken $g^{\mu\nu} = \begin{cases} 1 & \text{når } \mu = \nu = 0 \\ -1 & \text{når } \mu = \nu \neq 0 \\ 0 & \text{når } \mu \neq \nu \end{cases}$

I standardrepresentasjonen er

$$\gamma^0 = \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \vec{\gamma} = \beta\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$$

med

$$\vec{\sigma} = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right].$$

Spinn og helisitetsoperatorene

$$\vec{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\Sigma}\ , \quad \vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}$$

$$\Sigma_p = \frac{\vec{\Sigma}\vec{p}}{|\vec{p}|}$$

Ortogonalitetsrelasjoner for tilstandsspinorene

$$u^+(\vec{p},s)\ u(\vec{p},s') = \frac{E}{mc^2}\delta_{ss'} \qquad \bar{u}(\vec{p},s)\ u(\vec{p},s') = \delta_{ss'}$$

$$v^+(\vec{p},s)\ v(\vec{p},s') = \frac{E}{mc^2}\delta_{ss'} \qquad \bar{v}(\vec{p},s)\ v(\vec{p},s') = -\delta_{ss'}$$

$$u^+(\vec{p},s)\ v(-\vec{p},s') = 0 \qquad \bar{u}(\vec{p},s)\ v(\vec{p},s') = 0$$

$$\bar{u}(\vec{p},s) = u^+(\vec{p},s)\gamma^0$$

Fullstendighetsrelasjon

$$\sum_{s=1}^{2} [u_\alpha(\vec{p},s)\ \bar{u}_\beta(\vec{p},s) - v_\alpha(\vec{p},s)\ \bar{v}_\beta(\vec{p},s)] = \delta_{\alpha p}$$

Sporformler

$\not{p} = \gamma^\mu p_\mu$

$\mathrm{Sp}1 = 4$

$\mathrm{Sp}(\gamma_\mu\gamma_\nu) = 4g_{\mu\nu}$

$\mathrm{Sp}(\gamma_\kappa\gamma_\lambda\gamma_\mu\gamma_\nu) = 4(g_{\kappa\lambda}g_{\mu\nu} - g_{\kappa\mu}g_{\lambda\nu} + g_{\kappa\nu}g_{\lambda\mu})$

mens sporet av et produkt med et ulike antall γ-matriser blir 0.