

UNIVERSITETET I TRONDHEIM
NORGES TEKNISKE HØGSKOLE
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:

Finn Bakke *for Alex Hansen*

Tlf. 3649

KONTINUASJONSEKSAMEN I FAG 74327 RELATIVISTISK KVANTEMEKANIKK

Lørdag 20. august 1994

kl. 0900–1400

Tillatte hjelpemidler: Rottmann: Matematische Formelsammlung
Barnett and Cronin: Mathematical Formulae
Godkjent kalkulator

Oppgave 1

- a) Vi starter med litt generell énpartikkel kvantemekanikk. Anta at vi har en Hamilton-funksjon $H(t) = H_0 + V(t)$, hvor H_0 er tidsuavhengig og $[H_0, V(t)] = 0$. Schrödinger-ligningen for dette systemet er

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\Psi_S(t)\rangle = H(t) |\Psi_S(t)\rangle \quad (1.1)$$

i Schrödingerbildet. Vi definerer tilstanden $|\Psi_I(t)\rangle$ i *vekselvirknings* eller *Diracbildet* som

$$|\Psi_I(t)\rangle = e^{iH_0 t} |\Psi_S(t)\rangle. \quad (1.2)$$

Vis at (1.1) omformes til

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\Psi_I(t)\rangle = V(t) |\Psi_I(t)\rangle \quad (1.3)$$

i dette bildet.

b) Tidsutviklingsoperatoren $U(t_f, t_i)$ defineres gjennom ligningen

$$|\Psi_I(t_f)\rangle = U(t_f, t_i)|\Psi_I(t_i)\rangle . \quad (1.4)$$

Integrér (1.3) og vis at

$$U(t_f, t_i) = \mathcal{T} e^{-i \int_{t_i}^{t_f} dt V(t)} , \quad (1.5)$$

hvor $\mathcal{T}$ er tidsordningsoperatoren.

c) La oss nå anta at vårt system er en harmonisk oscillator påvirket av en ytre (ikkekvantisert) kraft $f(t)$, slik at

$$H = \left(\frac{1}{2m} p^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \right) - f(t)x . \quad (1.6)$$

I vekselvirkningsbildet utvikler x seg i tiden som

$$x(t) = \sqrt{\frac{2}{m\omega}} (a e^{-i\omega t} + a^\dagger e^{i\omega t}) . \quad (1.7)$$

Vis at tidsutviklingsoperatoren kan skrives som

$$U(t_f, t_i) = e^{i(a\tilde{f}^*(\omega) + a^\dagger\tilde{f}(\omega))} , \quad (1.8)$$

hvor vi har definert

$$\tilde{f}(\omega) = \sqrt{\frac{2}{m\omega}} \int_{t_i}^{t_f} dt e^{i\omega t} f(t) . \quad (1.9)$$

Når $t_i \rightarrow -\infty$ og $t_f \rightarrow \infty$ blir $\tilde{f}(\omega)$ den Fourier transformerte av $f(t)$.

d) Vi har nå bruk for *Baker-Hausdorf* teoremet

$$e^{A+B} = e^A e^B e^{-[A,B]/2} , \quad (1.10)$$

hvor A og B er operatorer som er slik at $[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0$. Vis dette teoremet.

e) Bruk nå (1.10) til å vise at

$$U(t_f, t_i) = e^{ia^\dagger \tilde{f}(\omega)} e^{ia \tilde{f}^*(\omega)} e^{-|\tilde{f}(\omega)|^2/2} . \quad (1.11)$$

f) Bruk dette uttrykket til å finne sannsynligheten for at oscillatoren vår som vi antar befinner seg i grunntilstanden $|0\rangle$ ved tiden t_i , vil ende opp i tilstanden $|n\rangle = [(a^\dagger)^n / \sqrt{n!}] |0\rangle$ ved tiden t_f . Hva er midlere antall eksitasjoner ved t_f ?

g) Vi skal nå bruke disse resultatene til å studere lysemisjon fra en klassisk elektrisk strøm. Vi har altså en vekselvirkningsterm (når vi ignorerer Coulombvekselvirkningen)

$$V(t) = \int d^3 \vec{x} \mathcal{H}_I(x) = - \int d^3 \vec{x} \vec{A}(x) \cdot \vec{j}(x) \quad (1.12)$$

hvor $\vec{A}$ er den romlige komponenten av det elektromagnetiske vektorpotensialet

$$A^\mu(x) = \sum_{k,\alpha} \sqrt{\frac{1}{2V k^0}} [\epsilon_\alpha^\mu(k) a_\alpha(k) e^{-ikx} + \epsilon_\alpha^\mu(k) a_\alpha^\dagger(k) e^{+ikx}] . \quad (1.13)$$

Hva er sannsynligheten at strømmen $\vec{j}(x)$ fortsatt ikke har emitert noen lyskvanter ved tiden $t_f \rightarrow \infty$ når det ikke var noen tilstede ved tiden $t_i \rightarrow -\infty$. Hva er sannsynligheten for emisjon av et foton med energi k^0 og polarisasjon $\epsilon_\alpha^\mu(k)$ i løpet av tiden $t_f - t_i$, og hva er sannsynligheten for emisjon av to fotoner? Hva er midlere antall fotoner med energi k^0 og polarisasjon $\epsilon_\alpha^\mu(k)$ ved t_f ?

Oppgave 2

- Tegn Feynman diagrammene som gir bidrag til spredningsamplituden til laveste og nest laveste orden for prosessene $e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma$ og $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$.
- Bruk Feynmanreglene til å skrive ned Feynman amplituden $\mathcal{M}$ for diagrammene
- Forklar med ord hvorfor prosessene $e^- \rightarrow e^- \gamma$ og $e^- \gamma \rightarrow e^- \gamma \gamma$ ikke er observert.
- I oppgave 1g) over regnet vi ut sannsynligheten for at en elektrisk strøm i vakuum skal produsere *ett* foton. Hvordan kan denne sannsynligheten være forskjellig fra null sett i lys av punkt 2c) over?