

UNIVERSITETET I TRONDHEIM
NORGES TEKNISKE HØGSKOLE
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Alex Hansen
Tlf. 93649

KONTINUASJONSEKSAMEN I FAG 74327 RELATIVISTISK KVANTEMEKANIKK
Lørdag 26. august 1995
kl. 0900–1400

Tillatte hjelpemidler: Rottmann: Matematische Formelsammlung
Barnett and Cronin: Mathematical Formulae
Godkjent kalkulator

Oppgave 1

I denne oppgaven skal vi se på den ikke-relativistiske grensen av Klein-Gordon ligningen

$$[\partial_\mu \partial^\mu + m^2] \phi = 0. \quad (1)$$

- a) Gi en fysisk begrunnelse for denne ligningen.
b) Denne ligningen er av andre orden i $\partial/\partial t$. Ved å innføre definisjonen

$$\xi = \frac{\partial \phi}{\partial t}, \quad (2)$$

kan (1) skrives

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = [\nabla^2 - m^2] \phi. \quad (3)$$

Ved dette knepet har vi skrevet om Klein-Gordon ligningen som to ligninger av første orden i $\partial/\partial t$: (2) og (3). Innfør nå variablene

$$\theta = \frac{1}{2} \left[\phi + \frac{i}{m} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right] \quad (4)$$

og

$$\chi = \frac{1}{2} \left[\phi - \frac{i}{m} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right], \quad (5)$$

og vis at Klein-Gordon ligningen kan skrives på formen

$$\begin{aligned} i \frac{\partial \theta}{\partial t} &= - \frac{\nabla^2}{2m} (\theta + \chi) + m\theta \\ i \frac{\partial \chi}{\partial t} &= + \frac{\nabla^2}{2m} (\theta + \chi) - m\chi, \end{aligned} \quad (6)$$

ved å bruke (2) og (3).

c) Løsningen av (1) for en partikkel med positiv energi som ligger i ro er

$$\phi \propto e^{-imt}. \quad (7)$$

Bruk dette resultatet til å vise at Klein-Gordon ligningen går over til Schrödinger ligningen

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = - \frac{\nabla^2 \psi}{2m}, \quad (8)$$

i den ikke-relativistiske grensen. (Hint: $\theta = e^{-imt} \psi$.)

Oppgave 2

Den relativistiske relasjonen mellom hvilemasse, energi og impuls er

$$m^2 = E^2 - \vec{p}^2, \quad (9)$$

slik at

$$E = \pm \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}. \quad (10)$$

I denne oppgaven skal vi studere sammenhengen mellom (10) og Dirac ligningen,

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi = H \psi = (\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m) \psi, \quad (11)$$

nærmere. Her er $\vec{p} = -i\vec{\nabla}$ og $\{\alpha_i, \alpha_j\} = 2\delta_{ij}$ og $\{\beta, \alpha_i\} = 0$.

a) Definer operatoren

$$U = e^{\theta \vec{\beta} \cdot \vec{p}}, \quad (12)$$

hvor θ er en parameter. Vis at

$$U = \cos \theta |\vec{p}| + \frac{\vec{\beta} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} \sin \theta |\vec{p}|. \quad (13)$$

(Hint: Bruk rekkeutviklinger.)

b) Vis at U er unitær, det vil si

$$U^\dagger = U^{-1} = \cos \theta |\vec{p}| - \frac{\vec{\beta} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} \sin \theta |\vec{p}|. \quad (14)$$

c) Vi transformerer nå Dirac ligningen (11)

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi' = i \frac{\partial}{\partial t} U \psi = U H U^{-1} U \psi = H' \psi', \quad (15)$$

hvor $\psi' = U \psi$ og $H' = U H U^{-1}$. Vis at

$$H' = \vec{\alpha} \cdot \vec{p} \left(\cos 2\theta |\vec{p}| - \frac{m}{|\vec{p}|} \sin 2\theta |\vec{p}| \right) + \beta (m \cos 2\theta |\vec{p}| + |\vec{p}| \sin 2\theta |\vec{p}|). \quad (16)$$

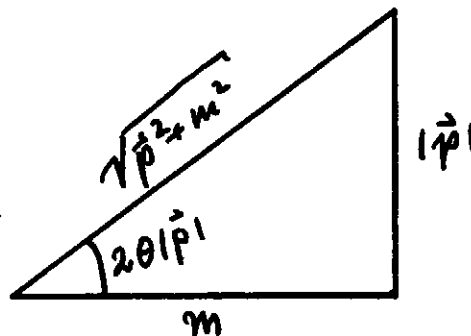
d) Velg nå θ slik at

$$\tan 2\theta |\vec{p}| = \frac{|\vec{p}|}{m}. \quad (17)$$

Vis at med dette valget, har vi at

$$H' = \beta \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}. \quad (18)$$

Hint:



e) Gjennom (18) ser vi nå likheten mellom Dirac ligningen (11) og uttrykket (10). Hvordan kan man argumentere for at β har "overtatt" rollen til $\pm i$ i (10)? Transformasjonen vi har akkurat gjennomgått kalles *Foldy-Wouthuysen* transformasjonen.

Oppgave 3

I denne oppgaven skal vi se på elektronets selvenergi.

- a) Laveste ordens korreksjon til elektronpropagatoren $iS_F(p) = i/(\not{p} - m + i\epsilon)$ kan skrives

$$iS'_F(p) = iS_F(p) + iS_F(p)(-i\Sigma(p))iS_F(p). \quad (19)$$

Denne ligningen kan representeres grafisk som:

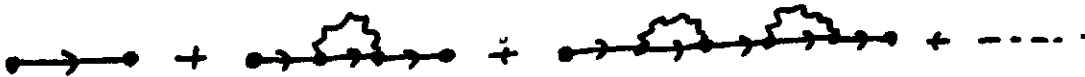


Hva er $-i\Sigma(p)$?

- b) Vis operatoridentiteten

$$\frac{1}{A+B} = \frac{1}{A} - \frac{1}{A}B\frac{1}{A} + \frac{1}{A}B\frac{1}{A}B\frac{1}{A} - \dots \quad (20)$$

- c) Bruk (20) til å vise at summen av diagrammene



er

$$iS'_F(p) = \frac{i}{\not{p} - m - \Sigma(p) + i\epsilon}. \quad (21)$$

- d) $\Sigma(p)$ kan skrives

$$\Sigma(p) = A + B(\not{p} - m) + \Sigma^R(p)(\not{p} - m)^2, \quad (22)$$

hvor $\Sigma^R(p)$ er en "rest"-funksjon. A og B er konstanter som ikke inneholder γ -matriser. A , B og $\Sigma^R(p)$ er av orden e^2 — altså små. Anta videre at $p^2 \approx m^2$, det vil si at elektronet er nær masseskallet slik at termen $\Sigma^R(p)(\not{p} - m)^2$ kan neglisjeres. Vis at vi da kan skrive (21) som

$$iS'_F(p) = \frac{i(1+B)}{\not{p} - m - A + i\epsilon}. \quad (23)$$

A kan tolkes som en massekorreksjon, $m \rightarrow m + \delta m = m + A$. La oss videre definere $Z_2 = 1 + B$. Altså, $iS'_F(p, m) = Z_2 iS_F(p, m + \delta m)$.

e) Vis at Z_2 kan tolkes som en korrigering av elektronladningen,

$$e \rightarrow e + \delta e = Z_2 e, \quad (24)$$

når vi oppgir at ytre linjer $u(p)$ korrigeres til $\sqrt{Z_2}u(p)$ til samme orden (ikke vis dette).

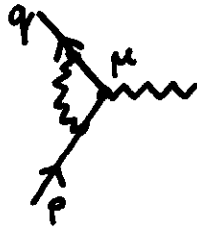
Oppgave 4

a) Utled relasjonen,

$$\frac{\partial}{\partial p_\mu} S_F(p) = -S_F(p) \gamma^\mu S_F(p). \quad (25)$$

(Hint: $S_F(p)S_F^{-1}(p) = S_F(p)(\not{p} - m) = 1$.)

b) Laveste ordens stråligskorreksjon til elektron-foton knutene er gitt ved diagrammet:



Denne korreksjonen forandrer knuten fra $ie\gamma^\mu$ til $ie\gamma^\mu + ie\Lambda^\mu(p, q)$. Hva er $\Lambda^\mu(p, q)$?

c) Vis *Ward identiteten*:

$$\Lambda^\mu(p, p) = -\frac{\partial}{\partial p_\mu} \Sigma(p), \quad (26)$$

hvor $\Sigma(p)$ er definert i oppgave 3a.

Regler for Feynman-diagram.

I impulsrommet

(Har satt $\hbar = c = 1$)

Ytre linjer:

Elektronlinjer:

$$\begin{array}{c} \nearrow \\ p, s \end{array} \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{m}{E_p} \right)^{\frac{1}{2}} u(p, s) \quad \begin{array}{c} \nearrow \\ p, s \end{array} \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{m}{E_p} \right)^{\frac{1}{2}} \bar{u}(p, s)$$

Positronlinjer:

$$\begin{array}{c} \searrow \\ p, s \end{array} \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{m}{E_p} \right)^{\frac{1}{2}} \bar{v}(p, s) \quad \begin{array}{c} \searrow \\ p, s \end{array} \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{m}{E_p} \right)^{\frac{1}{2}} v(p, s)$$

Fotonlinjer:

$$\begin{array}{c} \text{wavy} \\ k, \lambda \end{array} \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{2\omega_k} \right)^{\frac{1}{2}} \hat{e}_{k\lambda} \quad \begin{array}{c} \text{wavy} \\ k, \lambda \end{array} \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{2\omega_k} \right)^{\frac{1}{2}} \hat{e}_{k\lambda}$$

Ytre felt:

$$\begin{array}{c} p_2 \\ \diagdown \\ \text{X} \text{ } A_\mu^{\text{ytre}} \\ \diagup \\ p_1 \end{array} -ie\gamma^\mu A_\mu^{\text{ytre}} (\vec{p}_2 - \vec{p}_1) 2\pi\delta(E_1 - E_2)$$

med $A_\mu^{\text{ytre}}(k) = \int A_\mu^{\text{ytre}}(\vec{r}) e^{i\vec{k}\vec{r}} d^3x$

Indre linjer:

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ p \end{array} \quad \begin{array}{c} \uparrow \\ p \end{array} \quad \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{\gamma p + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \quad \text{og} \quad \int d^4p \quad (\epsilon \rightarrow 0)$$

$$\begin{array}{c} \text{wavy} \\ k \end{array} \quad \frac{-1}{(2\pi)^4} g_{\mu\nu} \frac{1}{k^2 + i\epsilon} \quad \text{og} \quad \int d^4k$$

Knuter:

$$\begin{array}{c} p_2, s \\ \diagdown \\ \text{X} \\ \diagup \\ p_1, s \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{wavy} \\ k, \lambda \end{array} -ie\gamma^\lambda (2\pi)^4 \delta^4(p_1 - p_2 - k)$$

Lukket fermionering:



ekstra faktor -1 .

Flere diagram til samme prosess adderes med $(-1)^{P_{\text{ferm}}}$ foran hvor P_{ferm} = antall permutasjoner av ytre fermioner i forhold til valgt utgangsdigram.

Dirac-matrisene:Antikommuteringsregler $\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$ med metrikken $g^{\mu\nu} = \begin{cases} 1 & \text{når } \mu = \nu = 0 \\ -1 & \text{når } \mu = \nu \neq 0 \\ 0 & \text{når } \mu \neq \nu \end{cases}$

I standardrepresentasjonen er

$$\gamma^0 = \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \vec{\gamma} = \beta \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$$

med

$$\vec{\sigma} = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right)$$

Spinn og helisitetsoperatorene

$$\vec{S} = \frac{\hbar}{2} \vec{\Sigma}, \quad \vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}$$

$$\Sigma_P = \frac{\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|}$$

Ortogonalitetsrelasjoner for tilstandsspinorene

$$u^+(\vec{p}, s) u(\vec{p}, s') = \frac{E}{mc^2} \delta_{ss'}$$

$$v^+(\vec{p}, s) v(\vec{p}, s') = \frac{E}{mc^2} \delta_{ss'}$$

$$u^+(\vec{p}, s) v(-\vec{p}, s') = 0$$