

NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE
UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:

Navn: Kåre Olaussen

Telefon: 9 3652

Eksamen i fag 74327 Relativistisk kvantemekanikk

Mandag 2. juni 1997

Tid: 0900–1400

Tillatte hjelpemidler: (Alternativ B): Godkjent lommekalkulator tillatt.

Rottmann, *Mathematische Formelsammlung*.

Barnett and Cronin: *Mathematical Formulae*.

Øgrim, *Størrelser og enheter i fysikken*.

Dette eksamens-settet er på 3 sider pluss et generelt vedlegg på 2 sider.

Oppgave 1:

- a) Tegn, dersom prosessene er mulige i *QED*, Feynman-diagrammene for alle bidrag av laveste ikke-trivielle orden for prosessene:

1. $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$
2. $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$
3. $e^- e^- \rightarrow \mu^- \mu^-$
4. $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \gamma$
5. $e^+ \mu^- \rightarrow \gamma \gamma$
6. $\mu^+ \mu^- \rightarrow \gamma \gamma$
7. $\gamma \rightarrow e^+ e^-$
8. $\gamma \gamma \rightarrow \gamma \gamma$

- b) Se nå litt nærmere på prosessen $e^+ e^- \rightarrow e^+ e^-$:

1. Tegn Feynman-diagrammene for alle bidrag av laveste ikke-trivielle orden for denne prosessen.
2. Bruk Feynman-reglene i vedlegget til å skrive ned de tilhørende algebraiske uttrykkene for spredningsamplituden.
3. For å beregne det upolariserte spredningsstverrsnittet for denne prosessen må man blant annet utføre følgende spor over γ -matriser:

$$X_{ab} = \text{Tr} \left[\gamma^\mu (\not{p}_1 + m_e) \gamma^\nu (\not{p}_2 - m_e) \gamma_\mu (\not{p}'_2 - m_e) \gamma_\nu (\not{p}'_1 + m_e) \right]. \quad (1)$$

Beregnet dette sporet for grensetilfellet $m_e = 0$.

4. Forklar hvordan dette sporet framkommer, og hvilke tilsvarende sporuttrykk man får å beregne. Du trenger ikke å utføre disse beregningene.

Oppgave 2:

Vi tenker oss et eksperiment som kan måle elektriske felter. Et slikt eksperiment vil nødvendigvis måtte ha endelig romlig oppløsning og endelig reponstid. Vi antar derfor at den størrelsen vi er i stand til å måle er det midlede feltet

$$\vec{\mathcal{E}} = \int d\vec{x} dt \vec{E}(\vec{x}, t) \frac{1}{4\pi^2 a^3 \tau} e^{-\vec{x}^2/2a^2} e^{-t^2/2\tau^2}, \quad (2)$$

der kvantefeltet $\vec{E}(\vec{x}, t)$ har Fourier utviklingen

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = i \sum_r \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{|\vec{k}|}{2}} \left[a_r(\vec{k}) \vec{e}_r(\vec{k}) e^{-ikx} - a_r(\vec{k})^\dagger \vec{e}_r(\vec{k})^* e^{ikx} \right], \quad (3)$$

med $kx = |\vec{k}|t - \vec{k} \cdot \vec{x}$.

- a) Del opp $\vec{\mathcal{E}}$ i en positiv frekvens del (dvs., annhilasjonsdel) og en negativ frekvens del (dvs., kreasjonsdel),

$$\vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{E}}^{(+)} + \vec{\mathcal{E}}^{(-)},$$

og beregn kommutatoren mellom $\vec{\mathcal{E}}^{(+)}$ og $\vec{\mathcal{E}}^{(-)}$:

$$C^{ij} \equiv [\mathcal{E}^{i(+)} , \mathcal{E}^{j(-)}]. \quad (4)$$

Oppgitt:

$$\begin{aligned} \int d\vec{x} dt e^{\pm ikx} e^{-\vec{x}^2/2a^2} e^{-t^2/\tau^2} &= 4\pi^2 a^3 \tau e^{-(a^2+\tau^2)\vec{k}^2/2} \\ \int d\vec{k} |\vec{k}| e^{-b\vec{k}^2} &= 2\pi/b^2 \end{aligned}$$

- b) Beregn vakuum forventningsverdien

$$D^{ij} = \langle 0 | \mathcal{E}^i \mathcal{E}^j | 0 \rangle. \quad (5)$$

Tips: Det kan være nyttig å benytte kommutatoren fra forrige punkt.

- c) Beregn vakuum forventningsverdien

$$D^{ijkl} = \langle 0 | \mathcal{E}^i \mathcal{E}^j \mathcal{E}^k \mathcal{E}^l | 0 \rangle. \quad (6)$$

Oppgave 3:

I kvante-elektrodynamikken oppfører vakuum seg som et ulinært medium. I denne oppgaven skal du studere hvordan dette (i prinsipp) vil påvirke hvordan lys (dvs. fotoner) forplanter seg i et sterkt ytre magnetfelt $\vec{B}_0$, f.eks. nær overflaten til en nøytronstjerne. Til laveste ikke-trivielle orden er dette beskrevet av (Euler-Heisenberg) Lagrangetettheten

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[\vec{E}^2 - (\vec{B}_0 + \vec{B})^2 \right] + \frac{2\alpha^2}{45 m_e^4} \left\{ \left[\vec{E}^2 - (\vec{B}_0 + \vec{B})^2 \right]^2 + 7 \left[\vec{E} \cdot (\vec{B}_0 + \vec{B}) \right]^2 \right\}. \quad (7)$$

Her er $\alpha = e^2/4\pi$ finstrukturkonstanten, og m_e elektronets masse. Alle uttrykk er i såkalte naturlige enheter.

- a) 4-de ordens leddene over skyldes en form for vakuumpolarisasjon som kan beskrives ved Feynman diagrammer. Hvilke Feynman diagrammer tror du beskriver denne effekten?
- b) Forklar uten regning hvorfor disse Feynmandiagrammene predikterer en effekt som er proporsjonal med α^2 og m_e^{-4} .

Tips: Bruk dimensjonsanalyse til å bestemme riktig potens av m_e .

- c) Velg koordinatsystem slik at $\vec{B}_0$ peker langs z -aksen, $\vec{B}_0 = B_0 \hat{e}_z$, og skriv ut Lagrange-tettheten opp til kvadratisk orden i feltene $\vec{E} = \vec{E}_\perp + E_z \hat{e}_z$ og $\vec{B} = \vec{B}_\perp + B_z \hat{e}_z$, der $\vec{E}_\perp$ og $\vec{B}_\perp$ er notasjon for vektorer som ligger i xy -planet.
- d) Forklar hvorfor Lagrangetettheten fra forrige punkt er ekvivalent, når det gjelder å beskrive dynamikken til systemet, med en tetthet av formen

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}(1 + k_1 \epsilon) \vec{E}_\perp^2 + \frac{1}{2}(1 + k_2 \epsilon) \vec{E}_z^2 - \frac{1}{2}(1 + k_3 \epsilon) \vec{B}_\perp^2 - \frac{1}{2}(1 + k_4 \epsilon) \vec{B}_z^2, \quad (8)$$

der $\epsilon = 4\alpha^2 B_0^2 / (45m_e^4)$. Gi de numeriske koeffisientene $k_1, \dots, k_4$.

- e) Bruk nå Lagrangetettheten fra forrige punkt til å bestemme forplantningshastigheten til lyset i forskjellige retninger og med forskjellig polarisering (dvs. retning av $\vec{E}$ -feltet):
1. Forplantning langs z -aksen, med polarisering langs x -aksen, beskrevet av feltet $\vec{A} = A_1(z, t) \hat{e}_x$.
 2. Forplantning langs z -aksen, med polarisering langs y -aksen, beskrevet av feltet $\vec{A} = A_2(z, t) \hat{e}_y$.
 3. Forplantning langs x -aksen, med polarisering langs z -aksen, beskrevet av feltet $\vec{A} = A_3(x, t) \hat{e}_z$.
 4. Forplantning langs x -aksen, med polarisering langs y -aksen, beskrevet av feltet $\vec{A} = A_4(x, t) \hat{e}_y$.

Bestem i alle tilfellene hvilken bølge ligning et felt av den oppgitte formen tilfredsstiller, og den tilhørende dispersjonsrelasjonen.

- f) Koeffisienten

$$\epsilon = \frac{4\alpha^2 B_0^2}{45 m_e^4} \quad (9)$$

er dimensjonsløs. Bestem den numeriske verdien av denne når $B_0 = 10^8$ T.

Oppgitt: I SI-enheter har vi

$$m_e = 9.109\,389\,7(54) \cdot 10^{-31} \text{ kg},$$

$$\alpha = 1/137.035\,989\,5(61),$$

$$\hbar = 1.054\,572\,66(63) \cdot 10^{-34} \text{ J s},$$

$$c = 299\,792\,458 \text{ m s}^{-1},$$

$$\epsilon_0 = 8.854\,187\,817 \dots \times 10^{-12} \text{ F m}^{-1},$$

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N A}^{-2}.$$

Vedlegg 1:

1 Sammenheng mellom amplitude T_{fi} og tverrsnitt σ

$$d\sigma = \frac{|T_{fi}|^2}{4\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - \sum_i p'_i) \prod_{i=1}^n \frac{d^3 p'_i}{(2\pi)^3 2E'_i} \quad (10)$$

2 Noen Feynmanregler for $-iT_{fi}$:

1. Utgående partikler			2. Innkommende partikler		
Type partikler	Grafisk symbol	Algebraisk uttrykk	Type partikler	Grafisk symbol	Algebraisk uttrykk
$e^-, \mu^-, \dots$		$\bar{u}(p, s)$	$e^-, \mu^-, \dots$		$u(p, s)$
$e^+, \mu^+, \dots$		$v(p, s)$	$e^+, \mu^+, \dots$		$\bar{v}(p, s)$
γ (foton)		$e_\mu(k, r)^*$	γ (foton)		$e_\mu(k, r)$
Uladet spinn-0		1	Uladet spinn-0		1

3. Propagatorer			4. Vekselvirkningsknuter		
Type partikler	Grafisk symbol	Algebraisk uttrykk	V.virkning $\mathcal{L}_{int}$	Grafisk symbol	Algebraisk uttrykk
$e^\pm, \mu^\pm, \dots$		$\frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$	$e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$		$ie\gamma^\mu$
γ (foton)		$\frac{-i\eta_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon}$	$-\frac{1}{3!}\mu\varphi^3$		$-i\mu$
Uladet spinn-0		$\frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon}$	$-\frac{1}{4!}\lambda\varphi^4$		$-i\lambda$

- Konservering av firer-impuls i hver knute.
- Integrasjon $\int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4}$ over hver ubestemt impuls.
- Faktor -1 for hver lukket fermionsløyfe.
- Relativt minustegn mellom diagrammer som adskiller seg ved ombytte av to fermioner.
- Kombinatorisk faktor $1/S$, der S er diagrammets symmetritall.

3 Noen fullstendighetsrelasjoner

i) Dirac partikler:

$$\sum_{s=1}^2 u(p, s) \bar{u}(p, s) = \not{p} + m \quad (11)$$

ii) Dirac antipartikler:

$$\sum_{s=1}^2 v(p, s) \bar{v}(p, s) = \not{p} - m \quad (12)$$

iii) Fotoner:

$$\sum_{r=1}^2 e_\mu(k, r) e_\nu^*(k, r) = -\eta_{\mu\nu} + \text{irrelevante ledd} \quad (13)$$

4 Dirac's γ -matriser

4.1 Standardrepresentasjonen

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad (14)$$

der I er en 2×2 enhetsmatrise, og $\vec{\sigma}$ er Pauli-matrisene:

$$\sigma^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (15)$$

4.2 Algebraiske relasjoner

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} \quad (16)$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu = -2\gamma^\nu \quad (17)$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma_\mu = 4\eta^{\nu\lambda} \quad (18)$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\sigma \gamma_\mu = -2\gamma^\sigma \gamma^\lambda \gamma^\nu \quad (19)$$

4.3 Noen spor-uttrykk

$$\text{Tr } 1 = 4 \quad (20)$$

$$\text{Tr } \gamma^\mu = 0 \quad (21)$$

$$\text{Tr } \gamma^\mu \gamma^\nu = 4\eta^{\mu\nu} \quad (22)$$

$$\text{Tr } \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda = 0 \quad (23)$$

$$\text{Tr } \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\sigma = 4 \left(\eta^{\mu\nu} \eta^{\lambda\sigma} - \eta^{\mu\lambda} \eta^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\sigma} \eta^{\nu\lambda} \right) \quad (24)$$