

NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE
UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:

Navn: Kåre Olaussen

Telefon: 9 3652

Eksamen i fag 74327 Relativistisk kvantemekanikk

Lørdag 6. juni 1998

Tid: 0900–1400

Tillatte hjelpemidler: (Alternativ B): Godkjent lommekalkulator tillatt.

Rottmann, *Mathematische Formelsammlung*.

Barnett and Cronin: *Mathematical Formulae*.

Øgrim, *Størrelser og enheter i fysikken*.

Dette eksamens-settet er på 2 sider pluss et generelt vedlegg på 2 sider.

Oppgave 1:

a) Tegn, dersom prosessene er mulige i *QED*, Feynman-diagrammene for alle bidrag av laveste ikke-trivielle orden for prosessene:

1. $e^+ \mu^- \rightarrow e^+ \mu^-$
2. $e^+ \mu^- \rightarrow e^- \mu^+$
3. $e^+ \mu^- \rightarrow e^+ \mu^- \gamma$
4. $e^+ \mu^- \rightarrow \gamma \gamma$
5. $e^+ e^- \rightarrow e^+ e^-$
6. $\mu^- \rightarrow e^- \gamma$
7. $\gamma \rightarrow e^+ e^-$
8. $\gamma \gamma \rightarrow \mu^+ \mu^-$
9. $\mu^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu$
10. $\mu^- \rightarrow e^+ e^- \mu^-$

b) Se nå i litt mer detalj på elektron-positron annihilasjon, $e^+ e^- \rightarrow \gamma \gamma$.

1. Tegn Feynman-diagrammene for alle bidrag av laveste ikke-trivielle orden for denne prosessen.
2. Bruk Feynman-reglene i vedlegget til å skrive ned de tilhørende algebraiske uttrykkene for spredningsamplituden $\mathcal{M}_{fi}$. Anta at det innkommende elektronet (positronet) har kvantetall p_1, s_1 (p_2, s_2) og de utgående fotonene kvantetall k_i, r_i , $i = 1, 2$. Alle uttrykk for henholdsvis firerimpuls og spinn. Innfør videre $q = p_1 - k_1$ og $q' = p_1 - k_2$.

3. For å beregne det upolariserte spredningsstverrsnittet trenger vi blant annet det midlede amplitudekvadratet

$$\overline{|\mathcal{M}_{fi}|^2} \equiv \frac{1}{4} \sum_{\{s_i, r_f\}} \mathcal{M}_{fi} \mathcal{M}_{fi}^*. \quad (1)$$

der summen går over alle spinntilstandene til de innkommende og utgående partiklene. Uttrykket over kan omskrives til en sum over spor av γ -matriser. Vis at ett av leddene i denne summen kan skrives på formen

$$\frac{2^{-m} e^n}{(q^2 - m_e^2)^2} \text{Tr} \{ (\not{p}_1 + m_e) \gamma^\mu (\not{q} + m_e) \gamma^\nu (\not{p}_2 + m_e) \gamma_\nu (\not{q} + m_e) \gamma_\mu \}, \quad (2)$$

der m og n er heltall.

4. Beregn sporet over, uttrykt ved skalarprodukt mellom de involverte firer-impulsene.
 5. Finn den minste og den største verdien som q^2 kan ha i denne prosessen, når invarianten $s = (p_1 + p_2)^2$ er gitt.
 6. Bestem resten av leddene som i tillegg til bidraget (2) utgjør $\overline{|\mathcal{M}_{fi}|^2}$.

Oppgave 2:

I denne oppgaven skal du se litt på en uladet Dirac-partikkel med et anomalt magnetisk moment μ_a , som er i et ytre magnetfelt $\vec{B} = B_0 \hat{e}_z$. Dynamikken for dette systemet er beskrevet av Lagrange-tettheten

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} \left[i \gamma^\mu \partial_\mu - \frac{1}{2} \mu_a \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - m \right] \psi, \quad (3)$$

der $F_{0i} = 0$, $F_{ij} = \epsilon_{ijk} B^k$, og $\sigma^{ij} = \epsilon^{ijk} \begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{pmatrix}$ i standard-representasjonen. Det minnes om at $\epsilon^{ijk} \epsilon_{imn} = \delta_m^j \delta_n^k - \delta_n^j \delta_m^k$.

- a) Hvilken masse-dimensjon $D\{\mu_a\}$ har parameteren μ_a (i naturlige enheter)?
 b) Skriv ned bevegelsesligningen for ψ -feltet.
 c) Gjør oppsplittingen $\psi = \begin{pmatrix} w_\uparrow \\ w_\downarrow \end{pmatrix}$, der $w_\uparrow$ og $w_\downarrow$ er to-komponent spinorer, og anta at løsningen har planbølge-form

$$w_\uparrow, w_\downarrow \sim e^{\mp i(\omega t - \vec{p} \cdot \vec{r})}.$$

Finn de resulterende algebraiske ligningene for $w_\uparrow$ og $w_\downarrow$. Dette kan skrives på 2×2 matriseform, der elementene er 2×2 undermatriser.

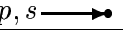
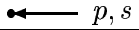
- d) Anta bevegelse langs magnetfeltet, $\vec{p} = p \hat{e}_z$, og bestem dispersjonsrelasjonen $\omega = \omega(p)$ i dette tilfellet.

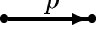
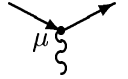
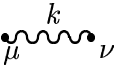
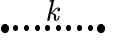
Vedlegg 1:

1 Sammenheng mellom amplitude $\mathcal{M}_{fi}$ og tverrsnitt σ

$$d\sigma = \frac{|\mathcal{M}_{fi}|^2}{4\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - \sum_i p'_i) \prod_{i=1}^n \frac{d^3 p'_i}{(2\pi)^3 2E'_i} \quad (4)$$

2 Noen Feynmanregler for $-i\mathcal{M}_{fi}$:

1. Utgående partikler			2. Innkommende partikler		
Type partikler	Grafisk symbol	Algebraisk uttrykk	Type partikler	Grafisk symbol	Algebraisk uttrykk
$e^-, \mu^-, \dots$		$\bar{u}(p, s)$	$e^-, \mu^-, \dots$		$u(p, s)$
$e^+, \mu^+, \dots$		$v(p, s)$	$e^+, \mu^+, \dots$		$\bar{v}(p, s)$
γ (foton)		$e_\mu(k, r)^*$	γ (foton)		$e_\mu(k, r)$
Uladet spinn-0		1	Uladet spinn-0		1

3. Propagatorer			4. Vekselvirkningsknuter		
Type partikler	Grafisk symbol	Algebraisk uttrykk	V.virkning $\mathcal{L}_{int}$	Grafisk symbol	Algebraisk uttrykk
$e^\pm, \mu^\pm, \dots$		$\frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$	$e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$		$ie\gamma^\mu$
γ (foton)		$\frac{-i\eta_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon}$	$-\frac{1}{3!}\mu\varphi^3$		$-i\mu$
Uladet spinn-0		$\frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon}$	$-\frac{1}{4!}\lambda\varphi^4$		$-i\lambda$

- i) Konservering av firer-impuls i hver knute.
- ii) Integrasjon $\int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4}$ over hver ubestemt impuls.
- iii) Faktor -1 for hver lukket fermionsløyfe.
- iv) Relativt minustegn mellom diagrammer som adskiller seg ved ombytte av to fermioner.
- v) Kombinatorisk faktor $1/S$, der S er diagrammets symmetritall.

3 Noen fullstendighetsrelasjoner

i) Dirac partikler:

$$\sum_{s=1}^2 u(p, s) \bar{u}(p, s) = \not{p} + m \quad (5)$$

ii) Dirac antipartikler:

$$\sum_{s=1}^2 v(p, s) \bar{v}(p, s) = \not{p} - m \quad (6)$$

iii) Fotoner:

$$\sum_{r=1}^2 e_{\mu}(k, r) e_{\nu}^{*}(k, r) = -\eta_{\mu\nu} + \text{irrelevante ledd} \quad (7)$$

4 Dirac's γ -matriser

4.1 Standardrepresentasjonen

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

der I er en 2×2 enhetsmatrise, og $\vec{\sigma}$ er Pauli-matrisene:

$$\sigma^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

4.2 Algebraiske relasjoner

$$\{\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}\} = 2\eta^{\mu\nu} \quad (10)$$

$$\gamma^{\mu} \gamma^{\nu} \gamma_{\mu} = -2\gamma^{\nu} \quad (11)$$

$$\gamma^{\mu} \gamma^{\nu} \gamma^{\lambda} \gamma_{\mu} = 4\eta^{\nu\lambda} \quad (12)$$

$$\gamma^{\mu} \gamma^{\nu} \gamma^{\lambda} \gamma^{\sigma} \gamma_{\mu} = -2\gamma^{\sigma} \gamma^{\lambda} \gamma^{\nu} \quad (13)$$

4.3 Noen spor-uttrykk

$$\text{Tr } 1 = 4 \quad (14)$$

$$\text{Tr } \gamma^{\mu} = 0 \quad (15)$$

$$\text{Tr } \gamma^{\mu} \gamma^{\nu} = 4\eta^{\mu\nu} \quad (16)$$

$$\text{Tr } \gamma^{\mu} \gamma^{\nu} \gamma^{\lambda} = 0 \quad (17)$$

$$\text{Tr } \gamma^{\mu} \gamma^{\nu} \gamma^{\lambda} \gamma^{\sigma} = 4\left(\eta^{\mu\nu} \eta^{\lambda\sigma} - \eta^{\mu\lambda} \eta^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\sigma} \eta^{\nu\lambda}\right) \quad (18)$$