NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE
UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Kåre Olaussen
Telefon: 9 3652

Eksamen i fag 74327 Relativistisk kvantemekanikk
Lørdag 6. juni 1998
Tid: 0900–1400

Tillatte hjelpemidler: (Alternativ B): Godkjent lommekalkulator tillatt.
Rottmann, *Mathematische Formelsammlung.*
Barnett and Cronin: *Mathematical Formulae.*
Øgrim, *Størrelser og enheter i fysikken.*

Dette eksamens-settet er på 2 sider pluss et generelt vedlegg på 2 sider.

Oppgave 1:

a) Tegn, dersom prosessene er mulige i *QED*, Feynman-diagrammene for alle bidrag av laveste ikke-trivielle orden for prosessene:

1. $e^+ \mu^- \to e^+ \mu^-$
2. $e^+ \mu^- \to e^- \mu^+$
3. $e^+ \mu^- \to e^+ \mu^- \gamma$
4. $e^+ \mu^- \to \gamma \gamma$
5. $e^+ e^- \to e^+ e^-$
6. $\mu^- \to e^- \gamma$
7. $\gamma \to e^+ e^-$
8. $\gamma \gamma \to \mu^+ \mu^-$
9. $\mu^- \to e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu$
10. $\mu^- \to e^+ e^- \mu^-$

b) Se nå i litt mer detalj på elektron-positron annihilasjon, $e^+ e^- \to \gamma\gamma$.

1. Tegn Feynman-diagrammene for alle bidrag av laveste ikke-trivielle orden for denne prosessen.
2. Bruk Feynman-reglene i vedlegget til å skrive ned de tilhørende algebraiske uttrykkene for spredningsamplituden $\mathcal{M}_{fi}$. Anta at det innkommende elektronet (positronet) har kvantetall p_1, s_1 (p_2, s_2) og de utgående fotonene kvantetall k_i, r_i, $i = 1, 2$. Alle uttrykk for henholdsvis firerimpuls og spinn. Innfør videre $q = p_1 - k_1$ og $q' = p_1 - k_2$.

3. For å beregne det upolariserte spredningsstverrsnittet trenger vi blant annet det midlede amplitudekvadratet

$$\overline{|\mathcal{M}_{fi}|^2} \equiv \frac{1}{4} \sum_{\{s_i, r_f\}} \mathcal{M}_{fi}\, \mathcal{M}^*_{fi}. \tag{1}$$

der summen går over alle spinntilstandene til de innkommende og utgående partiklene. Uttrykket over kan omskrives til en sum over spor av γ-matriser. Vis at ett av leddene i denne summen kan skrives på formen

$$\frac{2^{-m}\, e^n}{(q^2 - m_e^2)^2} \;\mathrm{Tr}\; \{(\not{p}_1 + m_e)\, \gamma^\mu\, (\not{q} + m_e)\, \gamma^\nu\, (\not{p}_2 + m_e)\, \gamma_\nu\, (\not{q} + m_e)\, \gamma_\mu\}\,, \tag{2}$$

der m og n er heltall.

4. Beregn sporet over, uttrykt ved skalarprodukt mellom de involverte firer-impulsene.
5. Finn den minste og den største verdien som q^2 kan ha i denne prosessen, når invarianten $s = (p_1 + p_2)^2$ er gitt.
6. Bestem resten av leddene som i tillegg til bidraget (2) utgjør $\overline{|\mathcal{M}_{fi}|^2}$.

Oppgave 2:

I denne oppgaven skal du se litt på en uladet Dirac-partikkel med et anomalt magnetisk moment μ_a, som er i et ytre magnetfelt $\vec{B} = B_0\, \hat{e}_z$. Dynamikken for dette systemet er beskrevet av Lagrange-tettheten

$$\mathcal{L} = \overline{\psi} \left[i\gamma^\mu \partial_\mu - \frac{1}{2}\, \mu_a\, \sigma^{\mu\nu}\, F_{\mu\nu} - m \right] \psi, \tag{3}$$

der $F_{0i} = 0$, $F_{ij} = \epsilon_{ijk}\, B^k$, og $\sigma^{ij} = \epsilon^{ijk} \begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{pmatrix}$ i standard-representasjonen. Det minnes om at $\epsilon^{ijk}\, \epsilon_{imn} = \delta^j_m\, \delta^k_m - \delta^j_n\, \delta^k_m$.

a) Hvilken masse-dimensjon $D\{\mu_a\}$ har parameteren μ_a (i naturlige enheter)?

b) Skriv ned bevegelsesligningen for ψ-feltet.

c) Gjør oppsplittingen $\psi = \begin{pmatrix} w_\uparrow \\ w_\downarrow \end{pmatrix}$, der $w_\uparrow$ og $w_\downarrow$ er to-komponent spinorer, og anta at løsningen har planbølge-form

$$w_\uparrow, w_\downarrow \sim \mathrm{e}^{\mp i(\omega t - \vec{p}\cdot\vec{r})}.$$

Finn de resulterende algebraiske ligningene for $w_\uparrow$ og $w_\downarrow$. Dette kan skrives på 2×2 matriseform, der elementene er 2×2 undermatriser.

d) Anta bevegelse langs magnetfeltet, $\vec{p} = p\, \hat{e}_z$, og bestem dispersjonsrelasjonen $\omega = \omega(p)$ i dette tilfellet.

Vedlegg 1:

1 Sammenheng mellom amplitude $\mathcal{M}_{fi}$ og tverrsnitt σ

$$d\sigma = \frac{|\mathcal{M}_{fi}|^2}{4\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}} (2\pi)^4 \, \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - \sum_i p_i') \prod_{i=1}^{n} \frac{d^3 p_i'}{(2\pi)^3 \, 2E_i'} \tag{4}$$

2 Noen Feynmanregler for $-i\mathcal{M}_{fi}$:

1. Utgående partikler			2. Innkommende partikler		
Type partikler	Grafisk symbol	Algebraisk uttrykk	Type partikler	Grafisk symbol	Algebraisk uttrykk
$e^-, \mu^-, \cdots$	p, s	$\overline{u}(p,s)$	$e^-, \mu^-, \cdots$	p, s	$u(p,s)$
$e^+, \mu^+, \cdots$	p, s	$v(p,s)$	$e^+, \mu^+, \cdots$	p, s	$\overline{v}(p,s)$
γ (foton)	k, r	$e_\mu(k,r)^*$	γ (foton)	k, r	$e_\mu(k,r)$
Uladet spinn–0	k	1	Uladet spinn–0	k	1

3. Propagatorer			4. Vekselvirkningsknuter		
Type partikler	Grafisk symbol	Algebraisk uttrykk	V.virkning $\mathcal{L}_{int}$	Grafisk symbol	Algebraisk uttrykk
$e^\pm, \mu^\pm, \cdots$	p	$\dfrac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$	$e\overline{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$	μ	$ie\gamma^\mu$
γ (foton)	μ k ν	$\dfrac{-i\eta_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon}$	$-\dfrac{1}{3!}\mu\varphi^3$		$-i\mu$
Uladet spinn–0	k	$\dfrac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon}$	$-\dfrac{1}{4!}\lambda\varphi^4$		$-i\lambda$

i) Konservering av firer-impuls i hver knute.

ii) Integrasjon $\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}$ over hver ubestemt impuls.

iii) Faktor -1 for hver lukket fermionsløyfe.

iv) Relativt minustegn mellom diagrammer som adskiller seg ved ombytte av to fermioner.

v) Kombinatorisk faktor $1/S$, der S er diagrammets symmetritall.

3 Noen fullstendighetsrelasjoner

i) Dirac partikler:

$$\sum_{s=1}^{2} u(p,s)\,\overline{u}(p,s) = \not{p} + m \tag{5}$$

ii) Dirac antipartikler:

$$\sum_{s=1}^{2} v(p,s)\,\overline{v}(p,s) = \not{p} - m \tag{6}$$

iii) Fotoner:

$$\sum_{r=1}^{2} e_\mu(k,r)\,e_\nu^*(k,r) = -\eta_{\mu\nu} + \text{irrelevante ledd} \tag{7}$$

4 Dirac's γ-matriser

4.1 Standardrepresentasjonen

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \qquad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \tag{8}$$

der I er en 2×2 enhetsmatrise, og $\vec{\sigma}$ er Pauli-matrisene:

$$\sigma^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

4.2 Algebraiske relasjoner

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\,\eta^{\mu\nu} \tag{10}$$
$$\gamma^\mu\,\gamma^\nu\,\gamma_\mu = -2\,\gamma^\nu \tag{11}$$
$$\gamma^\mu\,\gamma^\nu\,\gamma^\lambda\,\gamma_\mu = 4\,\eta^{\nu\lambda} \tag{12}$$
$$\gamma^\mu\,\gamma^\nu\,\gamma^\lambda\,\gamma^\sigma\,\gamma_\mu = -2\,\gamma^\sigma\,\gamma^\lambda\,\gamma^\nu \tag{13}$$

4.3 Noen spor-uttrykk

$$\mathrm{Tr}\,1 = 4 \tag{14}$$
$$\mathrm{Tr}\,\gamma^\mu = 0 \tag{15}$$
$$\mathrm{Tr}\,\gamma^\mu\,\gamma^\nu = 4\,\eta^{\mu\nu} \tag{16}$$
$$\mathrm{Tr}\,\gamma^\mu\,\gamma^\nu\,\gamma^\lambda = 0 \tag{17}$$
$$\mathrm{Tr}\,\gamma^\mu\,\gamma^\nu\,\gamma^\lambda\,\gamma^\sigma = 4\left(\eta^{\mu\nu}\,\eta^{\lambda\sigma} - \eta^{\mu\lambda}\,\eta^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\sigma}\,\eta^{\nu\lambda}\right) \tag{18}$$