

NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE
UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:

Navn: Kåre Olaussen

Telefon: 9 3652

Eksamen i fag 74327 Relativistisk kvantemekanikk

Lørdag 29. august 1998

Tid: 0900–1400

Tillatte hjelpemidler: (Alternativ B): Godkjent lommekalkulator tillatt.

Rottmann, *Mathematische Formelsammlung*.

Barnett and Cronin: *Mathematical Formulae*.

Øgrim, *Størrelser og enheter i fysikken*.

Dette eksamens-settet er på 2 sider pluss et generelt vedlegg på 2 sider.

Oppgave 1:

- a) Tegn, dersom prosessene er mulige i *QED*, Feynman-diagrammene for alle bidrag av laveste ikke-trivielle orden for prosessene:

1. $e^+ \mu^- \rightarrow e^+ \mu^-$
2. $e^+ \mu^- \rightarrow e^- \mu^+$
3. $e^+ \mu^- \rightarrow e^+ \mu^- \gamma$
4. $e^+ \mu^- \rightarrow \gamma \gamma$
5. $e^+ e^- \rightarrow e^+ e^-$
6. $\mu^- \rightarrow e^- \gamma$
7. $\gamma \rightarrow \mu^+ \mu^-$
8. $\gamma \gamma \rightarrow \mu^+ \mu^-$
9. $\mu^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu$
10. $\mu^- \rightarrow e^+ e^- \mu^-$

- b) Se nå i litt mer detalj på myon-antimyon produksjon fra annihilasjon av fotoner: $\gamma \gamma \rightarrow \mu^+ \mu^-$.

1. Tegn Feynman-diagrammene for alle bidrag av laveste ikke-trivielle orden for denne prosessen.
2. Bruk Feynman-reglene i vedlegget til å skrive ned de tilhørende algebraiske uttrykkene for spredningsamplituden $\mathcal{M}_{fi}$. Anta at de innkommende fotonene har kvantetall k_i, r_i , $i = 1, 2$, og det utgående myonet (anti-myonet) har kvantetall p_1, s_1 (p_2, s_2). Alle uttrykk for henholdsvis firerimpuls og spinn. Innfør videre $q = p_1 - k_1$ og $q' = k_1 - p_2$.

3. For å beregne det upolariserte spredningsstverrsnittet trenger vi blant annet det midlede amplitudekvadratet

$$\overline{|\mathcal{M}_{fi}|^2} \equiv \frac{1}{4} \sum_{\{s_i, r_f\}} \mathcal{M}_{fi} \mathcal{M}_{fi}^*. \quad (1)$$

der summen går over alle spinntilstandene til de innkommende og utgående partiklene. Uttrykket over kan omskrives til en sum over spor av γ -matriser. Vis at ett av leddene i denne summen kan skrives på formen

$$\frac{2^{-r} e^s}{(q^2 - m^2)^2} \text{Tr} \{ (\not{p}_1 + m) \gamma^\mu (\not{q} + m) \gamma^\nu (\not{p}_2 - m) \gamma_\nu (\not{q} + m) \gamma_\mu \}, \quad (2)$$

der m er myonets masse, og r og s er heltall.

4. Beregn sporet over, uttrykt ved skalarprodukt mellom de involverte firer-impulsene.
 5. Finn den minste verdien som invarianten s kan ha for at denne prosessen skal være mulig.
 6. Bestem resten av leddene som i tillegg til bidraget (2) utgjør $\overline{|\mathcal{M}_{fi}|^2}$.

Oppgave 2:

I denne oppgaven skal du se litt på en Dirac-partikkel som beveger seg gjennom en tynn elektrostatisk barriere av bredde ℓ . Vi beskriver dynamikken for dette systemet ved Lagrange-tettheten

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} \left[i \gamma^\mu \partial_\mu - \gamma^0 V(z) - m \right] \psi, \quad (3)$$

der

$$V(z) = \begin{cases} V_0 & \text{for } 0 \leq z \leq \ell \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases} \quad (4)$$

- a) Hvilken masse-dimensjon $D\{V_0\}$ har parameteren V_0 (i naturlige enheter)?
 b) Skriv ned bevegelsesligningen for ψ -feltet.
 c) Se nå spesielt på en partikkel som beveger seg i z -retningen: Gjør oppsplittingen

$$\psi = \begin{pmatrix} w_\uparrow \\ w_\downarrow \end{pmatrix},$$

der $w_\uparrow$ og $w_\downarrow$ er to-komponent spinorer, og anta at løsningen har planbølge-form

$$w_\uparrow, w_\downarrow \sim e^{-i(\omega t - p_i z)},$$

der p_i , $i = 1, 2, 3$ kan anta forskjellige verdier i de tre områdene (1) $z < 0$, (2) $0 < z_0 < \ell$, og (3) $z > \ell$. Finn de resulterende algebraiske ligningene for $w_\uparrow$ og $w_\downarrow$ i de tre områdene.

- d) Finn sammenhengen mellom p og ω i de tre områdene.
 e) Analyser spesielt oppførselen til p_2 ettersom V_0 økes fra $V_0 = 0$ til $V_0 = \infty$, og forsøk å gi en fysisk tolkning av denne oppførselen.

Vedlegg 1:

1 Sammenheng mellom amplitude $\mathcal{M}_{fi}$ og tverrsnitt σ

$$d\sigma = \frac{|\mathcal{M}_{fi}|^2}{4\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - \sum_i p'_i) \prod_{i=1}^n \frac{d^3 p'_i}{(2\pi)^3 2E'_i} \quad (5)$$

2 Noen Feynmanregler for $-i\mathcal{M}_{fi}$:

1. Utgående partikler			2. Innkommende partikler		
Type partikler	Grafisk symbol	Algebraisk uttrykk	Type partikler	Grafisk symbol	Algebraisk uttrykk
$e^-, \mu^-, \dots$	$\bullet \longrightarrow p, s$	$\bar{u}(p, s)$	$e^-, \mu^-, \dots$	$p, s \longrightarrow \bullet$	$u(p, s)$
$e^+, \mu^+, \dots$	$\bullet \longleftarrow p, s$	$v(p, s)$	$e^+, \mu^+, \dots$	$p, s \longleftarrow \bullet$	$\bar{v}(p, s)$
γ (foton)	$\curvearrowright k, r$	$e_\mu(k, r)^*$	γ (foton)	$k, r \curvearrowleft$	$e_\mu(k, r)$
Uladet spinn=0	$\bullet \dots \dots k$	1	Uladet spinn=0	$k \dots \dots \bullet$	1

3. Propagatorer			4. Vekselvirkningsknuter		
Type partikler	Grafisk symbol	Algebraisk uttrykk	V.virkning $\mathcal{L}_{int}$	Grafisk symbol	Algebraisk uttrykk
$e^\pm, \mu^\pm, \dots$	$\bullet \xrightarrow{p} \bullet$	$\frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$	$e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$	$\begin{array}{c} \nearrow \\ \mu \quad \zeta \\ \searrow \end{array}$	$ie\gamma^\mu$
γ (foton)	$\begin{array}{c} k \\ \curvearrowright \mu \quad \nu \end{array}$	$\frac{-i\eta_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon}$	$-\frac{1}{3!}\mu\varphi^3$	$\begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array}$	$-i\mu$
Uladet spinn=0	$\bullet \dots \dots k \dots \dots \bullet$	$\frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon}$	$-\frac{1}{4!}\lambda\varphi^4$	$\begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array}$	$-i\lambda$

- Konservering av firer-impuls i hver knute.
- Integrasjon $\int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4}$ over hver ubestemt impuls.
- Faktor -1 for hver lukket fermionsløyfe.
- Relativt minustegn mellom diagrammer som adskiller seg ved ombytte av to fermioner.
- Kombinatorisk faktor $1/S$, der S er diagrammets symmetritall.

3 Noen fullstendighetsrelasjoner

i) Dirac partikler:

$$\sum_{s=1}^2 u(p, s) \bar{u}(p, s) = \not{p} + m \quad (6)$$

ii) Dirac antipartikler:

$$\sum_{s=1}^2 v(p, s) \bar{v}(p, s) = \not{p} - m \quad (7)$$

iii) Fotoner:

$$\sum_{r=1}^2 e_\mu(k, r) e_\nu^*(k, r) = -\eta_{\mu\nu} + \text{irrelevante ledd} \quad (8)$$

4 Dirac's γ -matriser

4.1 Standardrepresentasjonen

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad (9)$$

der I er en 2×2 enhetsmatrise, og $\vec{\sigma}$ er Pauli-matrisene:

$$\sigma^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

4.2 Algebraiske relasjoner

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} \quad (11)$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu = -2\gamma^\nu \quad (12)$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma_\mu = 4\eta^{\nu\lambda} \quad (13)$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\sigma \gamma_\mu = -2\gamma^\sigma \gamma^\lambda \gamma^\nu \quad (14)$$

4.3 Noen spor-uttrykk

$$\text{Tr } 1 = 4 \quad (15)$$

$$\text{Tr } \gamma^\mu = 0 \quad (16)$$

$$\text{Tr } \gamma^\mu \gamma^\nu = 4\eta^{\mu\nu} \quad (17)$$

$$\text{Tr } \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda = 0 \quad (18)$$

$$\text{Tr } \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\sigma = 4 \left(\eta^{\mu\nu} \eta^{\lambda\sigma} - \eta^{\mu\lambda} \eta^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\sigma} \eta^{\nu\lambda} \right) \quad (19)$$