NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE
UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Kåre Olaussen
Telefon: 9 36 52

Eksamen i fag 74327 RELATIVISTISK KVANTEMEKANIKK
Lørdag 15. mai 1999
Tid: 09:00—14:00

Tillatte hjelpemidler: (Alternativ B): Godkjent lommekalkulator.
K. Rottman: *Matematisk formelsamling.*
Barnett and Cronin: *Mathematical Formulae.*
Øgrim: *Størrelser og enheter i fysikken*

Dette eksamenssettet er på 3 sider pluss et generelt vedlegg på 2 sider.

Oppgave 1:

a) Tegn, dersom prosessene er mulige i *QED*, Feynman-diagrammene for alle bidrag av laveste ikke-trivielle orden for prosessene:

1. $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$
2. $e^+\mu^- \to e^-\mu^+$
3. $e^+e^- \to \mu^+\mu^-\gamma$
4. $e^-e^- \to e^-e^-$
5. $\mu^- \to \mu^-e^+e^-$
6. $\mu^-\gamma \to \mu^-e^+e^-$
7. $\gamma\gamma \to \gamma\gamma\gamma$

b) Se nå i litt mer detalj på Möller spredning, $e^-e^- \to e^-e^-$.

1. Tegn Feynman-diagrammene for alle bidrag av laveste ikke-trivielle orden for denne prosessen. Påfør diagrammet alle nødvendige impulser og indekser. Anta at de innkommende elektronene har kvantetall p_i, s_i, $i = 1,2$, og de utgående elektronene kvantetall p'_f, s'_f, $f = 1,2$. Innfør videre $q = p_1 - p'_1$ og $q' = p_1 - p'_2$.
2. Bruk Feynman-reglene i vedlegget til å skrive ned de tilhørende algebraiske uttrykkene for spredningsamplituden $\mathcal{M}_{fi}$.

3. For å beregne det upolariserte spredningsstverrsnittet trenger vi blant annet det midlede amplitudekvadratet
$$\overline{|\mathcal{M}_{fi}|^2} \equiv \frac{1}{4} \sum_{\{s_i, s'_f\}} \mathcal{M}_{fi} \mathcal{M}^*_{fi}. \tag{1}$$
der summen går over alle spinntilstandene til de innkommende og utgående partiklene. Uttrykket over kan omskrives til en sum over spor av γ-matriser. Vis at ett av leddene i denne summen kan skrives på formen
$$\mathcal{F}(q) \times \mathrm{Tr}\,\{\gamma^\mu (\not p_1 + m_e) \gamma^\nu \, (\not p'_1 + m_e)\}\ \mathrm{Tr}\,\{\gamma_\mu (\not p_2 + m_e) \gamma_\nu \, (\not p'_2 + m_e)\}, \tag{2}$$
og bestem funksjonen $\mathcal{F}(q)$.

4. Beregn produktet av sporene over,
$$Q \equiv \mathrm{Tr}\,\{\gamma^\mu (\not p_1 + m_e) \gamma^\nu \, (\not p'_1 + m_e)\}\ \mathrm{Tr}\,\{\gamma_\mu (\not p_2 + m_e) \gamma_\nu \, (\not p'_2 + m_e)\}. \tag{3}$$
Uttrykk svaret ved skalarprodukt mellom de involverte firer-impulsene.

Oppgave 2:

Fourier–utviklingen for et fritt, reellt Klein Gordon felt (definert ved Lagrangetettheten $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\,\partial^\mu\varphi - \frac{1}{2}m^2\varphi^2$) lyder
$$\varphi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{1}{2\omega_k}} \left[a(\mathbf{k})\,e^{-ikx} + a^\dagger(\mathbf{k})\,e^{ikx}\right]. \tag{4}$$

a) Skriv ned den tilsvarende Fourier–utviklingen for den kanonisk konjugerte impulstettheten $\pi_\varphi(x) \equiv \pi(x)$.

b) Det er vanlig å dekomponere disse feltene i positiv frekvens, $\varphi^{(+)}(x)$, $\pi^{(+)}(x)$, og negativ frekvens, $\varphi^{(-)}(x)$, $\pi^{(-)}(x)$ deler. Beskriv denne dekomposisjonen.

c) Beregn vakuum-forventningsverdien
$$\langle 0 | \varphi(x)\, \pi(y) | 0 \rangle. \tag{5}$$
Uttrykk svaret som en kommutator mellom noen av feltene $\varphi^{(\pm)}(x)$, $\pi^{(\pm)}(y)$.

d) Vi ser så på en generell én-partikkel tilstand
$$| f \rangle = \int d^3k\, f(\mathbf{k})\, a^\dagger(\mathbf{k}) | 0 \rangle \equiv \varphi_f^{(-)} | 0 \rangle. \tag{6}$$
Skriv ned det tilsvarende uttrykket for $\langle f |$. Hvilken betingelse må $f(\mathbf{k})$ oppfylle for at denne tilstanden skal være normert, $\langle f | f \rangle = 1$? (Vakuum-tilstanden antas å være normert, $\langle 0 | 0 \rangle = 1$.)

e) Beregn matrise-elementene
$$\Phi_f(x) = \langle 0 | \varphi(x) | f \rangle, \qquad \Pi_f(y) = \langle 0 | \pi(y) | f \rangle. \tag{7}$$
Vis at svarene kan uttrykkes som kommutatorer mellom noen av feltene $\varphi^{(\pm)}(x)$, $\pi^{(\pm)}(y)$, og $\varphi_f^{(\pm)}$.

f) Beregn forventningsverdien (når $\langle f \,|\, f \rangle = 1$)

$$\langle f \,|\, \varphi(x)\, \pi(y) \,|\, f \rangle - \langle 0 \,|\, \varphi(x)\, \pi(y) \,|\, 0 \rangle. \tag{8}$$

Tips: Svaret kan uttrykkes ved funksjonene $\Phi_f(x)$, $\Pi_f(y)$ og deres kompleks konjugerte.

Oppgave 3:

I denne oppgaven skal du analysere en variant av det fri elektromagnetiske felt, definert ved Lagrangetettheten

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\mathbf{E}^2 - \frac{1}{2}\mathbf{B}^2 + \theta\, \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}, \tag{9}$$

der $\mathbf{E}$ og $\mathbf{B}$ kan uttrykkes ved vektorpotensialet $\mathbf{A}$ som

$$\mathbf{E} = -\dot{\mathbf{A}} = -\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}, \qquad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \tag{10}$$

I første del av oppgaven skal θ regnes som en konstant dimensjonsløs parameter. Det regnes hele tiden med naturlige enheter, dvs. der $\hbar = c = \varepsilon_0 = \mu_0 = 1$.

a) Finn den kanoniske konjugerte impulstettheten $\mathbf{\Pi_A}$ til feltet $\mathbf{A}$.

b) I en kanonisk kvantisering av denne teorien, hva skal lik tid (equal time) kommutatoren

$$\left[\dot{A}^j(\mathbf{x}, 0), A^k(\mathbf{y}, 0)\right]$$

være?

c) Finn den tilhørende Hamiltontettheten $\mathcal{H}$ for denne modellen.

d) Bruk de generelle Euler-Lagrange ligningene til å finne bevegelsesligningene for $\mathbf{A}$-feltet.

e) Anta nå at θ er tidsavhengig, $\theta = \mu t$, der μ er konstant parameter. Hvilken massedimensjon må μ ha?

f) Hva blir bevegelsesligningene for $\mathbf{A}$-feltet i dette tilfellet?

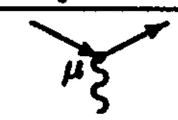
Vedlegg 1:

1 Sammenheng mellom amplitude $\mathcal{M}_{fi}$ og tverrsnitt σ

$$d\sigma = \frac{|\mathcal{M}_{fi}|^2}{4\sqrt{(p_1\cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}}\,(2\pi)^4\,\delta^{(4)}(p_1 + p_2 - \sum_i p_i')\prod_{i=1}^{n}\frac{d^3p_i'}{(2\pi)^3\,2E_i'} \tag{11}$$

2 Noen Feynmanregler for $-i\mathcal{M}_{fi}$:

1. Utgående partikler			2. Innkommende partikler		
Type partikler	Grafisk symbol	Algebraisk uttrykk	Type partikler	Grafisk symbol	Algebraisk uttrykk
$e^-, \mu^-, \cdots$	$\bullet\!\!\longrightarrow p, s$	$\bar{u}(p,s)$	$e^-, \mu^-, \cdots$	$p, s \longrightarrow\!\!\bullet$	$u(p,s)$
$e^+, \mu^+, \cdots$	$\bullet\!\!\longleftarrow p, s$	$v(p,s)$	$e^+, \mu^+, \cdots$	$p, s \longleftarrow\!\!\bullet$	$\bar{v}(p,s)$
γ (foton)	$\bullet\!\sim\!\sim\!\sim k, r$	$e_\mu(k,r)^*$	γ (foton)	$k, r \sim\!\sim\!\sim\!\bullet$	$e_\mu(k,r)$
Uladet spinn–0	$\cdots\cdots k$	1	Uladet spinn–0	$k\ \cdots\cdots$	1

3. Propagatorer			4. Vekselvirkningsknuter		
Type partikler	Grafisk symbol	Algebraisk uttrykk	V.virkning $\mathcal{L}_{int}$	Grafisk symbol	Algebraisk uttrykk
$e^\pm, \mu^\pm, \cdots$	$\bullet\!\xrightarrow{p}\!\bullet$	$\frac{i(\not p + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$	$e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$		$ie\gamma^\mu$
γ (foton)	$\mu \overset{k}{\sim\!\sim\!\sim} \nu$	$\frac{-i\eta_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon}$	$-\frac{1}{3!}\mu\varphi^3$		$-i\mu$
Uladet spinn–0	$\cdots\overset{k}{\cdots}\cdots$	$\frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon}$	$-\frac{1}{4!}\lambda\varphi^4$		$-i\lambda$

i) Konservering av firer-impuls i hver knute.

ii) Integrasjon $\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}$ over hver ubestemt impuls.

iii) Faktor -1 for hver lukket fermionsløyfe.

iv) Relativt minustegn mellom diagrammer som adskiller seg ved ombytte av to fermioner.

v) Kombinatorisk faktor $1/S$, der S er diagrammets symmetritall.

3 Noen fullstendighetsrelasjoner

Dirac partikler, Dirac antipartikler, og fotoner :

$$\sum_{s=1}^{2} u(p,s)\,\overline{u}(p,s) = \not{p} + m, \qquad \sum_{s=1}^{2} v(p,s)\,\overline{v}(p,s) = \not{p} - m \tag{12}$$

$$\sum_{r=1}^{2} e_\mu(k,r)\,e_\nu^*(k,r) = -\eta_{\mu\nu} + \text{irrelevante ledd} \tag{13}$$

4 Dirac's γ-matriser

4.1 Standardrepresentasjonen

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \qquad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ -\sigma & 0 \end{pmatrix}, \tag{14}$$

der I er en 2×2 enhetsmatrise, og σ er Pauli-matrisene,

$$\sigma^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{15}$$

som oppfyller den algebraiske relasjonen

$$\sigma^i \sigma^j = \delta^{ij} + i\varepsilon^{ijk}\sigma^k, \text{ dvs. at } (\sigma\cdot\mathbf{a})\,(\sigma\cdot\mathbf{b}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + i\sigma\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) \tag{16}$$

4.2 Algebraiske relasjoner

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} \quad \Longrightarrow \not{p}\not{p} = p^2 \tag{17}$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu = -2\gamma^\nu \quad \Longrightarrow \gamma_\mu \not{p} \gamma^\mu = -2\not{p} \tag{18}$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma_\mu = 4\eta^{\nu\lambda} \quad \Longrightarrow \gamma_\mu \not{p}\not{q} \gamma^\mu = 4\,(pq) \tag{19}$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\sigma \gamma_\mu = -2\gamma^\sigma \gamma^\lambda \gamma^\nu \quad \Longrightarrow \gamma_\mu \not{p}\not{q}\not{r} \gamma^\mu = -2\not{r}\not{q}\not{p} \tag{20}$$

4.3 Noen spor-uttrykk

$$\mathrm{Tr}\,1 = 4 \tag{21}$$

$$\mathrm{Tr}\,\gamma^\mu = 0 \tag{22}$$

$$\mathrm{Tr}\,\gamma^\mu \gamma^\nu = 4\eta^{\mu\nu} \quad \Longrightarrow \mathrm{Tr}\,\not{p}\not{q} = 4\,(pq) \tag{23}$$

$$\mathrm{Tr}\,\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda = 0 \tag{24}$$

$$\mathrm{Tr}\,\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\sigma = 4\left(\eta^{\mu\nu}\eta^{\lambda\sigma} - \eta^{\mu\lambda}\eta^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\sigma}\eta^{\nu\lambda}\right) \tag{25}$$

$$\Longrightarrow \mathrm{Tr}\,\not{p}\not{q}\not{r}\not{s} = 4(pq)(rs) - 4(pr)(qs) + 4(ps)(qr)$$