



**Midtsemesterprøve i FY8307/3404/TFY18 RELATIVISTISK  
KVANTEMekanikk**

Torsdag 13. oktober 2005

10:15–12:00

Tillatte hjelpemidler: Vanlig kalkulator

K. Rottman: *Matematisk formelsamling* eller tilsvarende

Skriv *studentnummeret* ditt på hvert ark av oppgavesettet.

Dette oppgavesettet er på 3 sider.

**Oppgave 1.**

En fri feltteori er definert ved Lagrangetettheten

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi_1 \partial^\mu \varphi_1 + \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi_2 \partial^\mu \varphi_2 - \frac{1}{2} M^2 \varphi_1 \varphi_1 - \frac{1}{2} M^2 \varphi_2 \varphi_2 - \Delta^2 \varphi_1 \varphi_2 \\ & - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m_f) \psi, \end{aligned} \quad (1)$$

der  $\varphi_1$  og  $\varphi_2$  er relle Klein-Gordon felter,  $F^{\mu\nu} = \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu$  er den elektromagnetiske felttensoren, og  $\psi$  er et Dirac-felt.

I denne modellen er de kanonisk konjugerte impulstettheten til feltene  $A^0$  og  $A^i$  gitt som

- |    |                                                                                      |                          |
|----|--------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------|
| A. | $(\Pi_{A^0}, \Pi_{A^i}) = (\dot{A}^0, \dot{A}^i)$                                    | <input type="checkbox"/> |
| B. | $(\Pi_{A^0}, \Pi_{A^i}) = (-\dot{A}^0, \dot{A}^i)$                                   | <input type="checkbox"/> |
| C. | $(\Pi_{A^0}, \Pi_{A^i}) = (0, \dot{A}^i + \partial_i A^0)$                           | <input type="checkbox"/> |
| D. | $(\Pi_{A^0}, \Pi_{A^i}) = (0, -\dot{A}^i)$                                           | <input type="checkbox"/> |
| E. | $(\Pi_{A^0}, \Pi_{A^i}) = (\dot{A}^0 + \partial_i A^i, -\dot{A}^0 - \partial_i A^0)$ | <input type="checkbox"/> |

**Oppgave 2.**

Bruk Lagrangetettheten (1) til å skrive ned bevegelsesligningene for  $\varphi_1$  og  $\varphi_2$ .

**Oppgave 3.**

I modellen definert ved Lagrangetettheten (1) er det formelle uttrykket for vakuumforventningsverdien av energimpulstensoren lik  $\langle \Omega | T^{\mu\nu} | \Omega \rangle = \Lambda \eta^{\mu\nu}$ , der

- |    |                                                                                                                                                           |                          |
|----|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------|
| A. | $\Lambda = \frac{1}{2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left[ 2 p  + \sqrt{p^2 + M^2 - \Delta^2} + \sqrt{p^2 + M^2 + \Delta^2} - 4\sqrt{p^2 + m_f^2} \right]$ | <input type="checkbox"/> |
| B. | $\Lambda = \frac{1}{2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left[ 2 p  + 2\sqrt{p^2 + M^2} + 2\sqrt{p^2 + m_f^2} \right]$                                         | <input type="checkbox"/> |
| C. | $\Lambda = \frac{1}{2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left[ 2 p  + 2\sqrt{p^2 + M^2} + \sqrt{p^2 + \Delta^2} - 4\sqrt{p^2 + m_f^2} \right]$                 | <input type="checkbox"/> |
| D. | $\Lambda = \frac{1}{2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left[  p  + \sqrt{p^2 + M^2 + \Delta^2} + \sqrt{p^2 + M^2 - \Delta^2} + \sqrt{p^2 + m_f^2} \right]$   | <input type="checkbox"/> |
| E. | $\Lambda = \frac{1}{2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left[  p  + 2\sqrt{p^2 + M^2} + \sqrt{p^2 + \Delta^2} - \sqrt{p^2 + m_f^2} \right]$                   | <input type="checkbox"/> |

#### Oppgave 4.

Basert på ren dimensjonsanalyse vil man (i naturlige) enheter anta at  $\Lambda$  er av størrelsesorden  $500 \text{ TeV}^4 = 5 \cdot 10^{14} \text{ TeV}^4$ . Omregnet til SI-enheter svarer dette til en massetetthet på

- A.  $\varepsilon \approx 5 \cdot 10^{14} \text{ kg/m}^3$  ☐
- B.  $\varepsilon \approx 10^{25} \text{ kg/m}^3$  ☐
- C.  $\varepsilon \approx 5 \cdot 10^{33} \text{ kg/m}^3$  ☐
- D.  $\varepsilon \approx 10^{30} \text{ kg/m}^3$  ☐
- E.  $\varepsilon \approx 10^{35} \text{ kg/m}^3$  ☐

**Oppgitt:** Lyshastigheten  $c = 299\,792\,458 \text{ m/s}$ , Planck's konstant  $\hbar = 1.055 \cdot 10^{-34} \text{ kg m}^2/\text{s}$ , positronladningen  $e = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ .

#### Oppgave 5.

Anta at fermionfeltet i (1) kan utvikles i egenmoder som

$$\psi(x) = \sum_{\mathbf{p}, r} c_r(\mathbf{p}) u_r(\mathbf{p}) e^{-ipx} + d_r^\dagger(\mathbf{p}) u_r(\mathbf{p}) e^{ipx} \quad (2)$$

$c_r(\mathbf{p})$ ,  $(d_r^\dagger(\mathbf{p}))$  er annihilasjonsoperatører (kreasjons-operatorer) for partiklene (antipartiklene) i modellen, og la  $|\Omega\rangle$  være vakuumtilstanden for denne modellen. Marker hvilke av vakuumforventningsverdiene nedenfor som er null

- A.  $\langle \Omega | \psi(x) \psi(y) | \Omega \rangle$  ☐
- B.  $\langle \Omega | \psi(x) \bar{\psi}(y) | \Omega \rangle$  ☐
- C.  $\langle \Omega | \psi(x) c_r^\dagger(\mathbf{p}) | \Omega \rangle$  ☐
- D.  $\langle \Omega | c_r^\dagger(\mathbf{p}) \psi(x) | \Omega \rangle$  ☐
- E.  $\langle \Omega | \psi(x)^\dagger c_r^\dagger(\mathbf{p}) | \Omega \rangle$  ☐

#### Oppgave 6.

Diracligningen

$$[i(\gamma^0 \partial_0 + \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\nabla}) - m] \psi(x^0, \mathbf{x}) = 0$$

er invariant under rominversjon (paritets-transformasjon),  $\mathbf{x} \rightarrow -\mathbf{x}$ . Dvs. at hvis  $\psi(x^0, \mathbf{x})$  løser Diracligningen så gjør også  $\psi_P(x^0, \mathbf{x})$  det, når

- A.  $\psi_P(x^0, \mathbf{x}) = \psi(x^0, -\mathbf{x})$  ☐
- B.  $\psi_P(x^0, \mathbf{x}) = \gamma^0 \psi(x^0, -\mathbf{x})$  ☐
- C.  $\psi_P(x^0, \mathbf{x}) = i\gamma^2 \psi^*(x^0, -\mathbf{x})$  ☐
- D.  $\psi_P(x^0, \mathbf{x}) = \gamma^1 \gamma^3 \psi^*(x^0, -\mathbf{x})$  ☐
- E.  $\psi_P(x^0, \mathbf{x}) = \psi^*(-x^0, -\mathbf{x})$  ☐

#### Oppgave 7.

Beregn sporet  $T \equiv \text{Tr} \{ \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\lambda \}$ .

**Oppgave 8.**

La  $\mathcal{T}$  være tidsordningsoperatoren og  $\psi(x)$ ,  $\bar{\psi}(x)$  et kvantisert Diracfelt. Da gjelder (i naturlige enheter, dvs. når  $\hbar = c = 1$ )

- |    |                                                                                                  |                          |
|----|--------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------|
| A. | $\mathcal{T} \{ \psi(x) \bar{\psi}(y) \} = \mathcal{T} \{ \bar{\psi}(y) \psi(x) \}$              | <input type="checkbox"/> |
| B. | $\mathcal{T} \{ \psi(x) \bar{\psi}(y) \} = \mathcal{T} \{ \bar{\psi}(y) \psi(x) \} + iS_F(x-y)$  | <input type="checkbox"/> |
| C. | $\mathcal{T} \{ \psi(x) \bar{\psi}(y) \} = \mathcal{T} \{ \bar{\psi}(y) \psi(x) \} - iS_F(x-y)$  | <input type="checkbox"/> |
| D. | $\mathcal{T} \{ \psi(x) \bar{\psi}(y) \} = -\mathcal{T} \{ \bar{\psi}(y) \psi(x) \}$             | <input type="checkbox"/> |
| E. | $\mathcal{T} \{ \psi(x) \bar{\psi}(y) \} = -\mathcal{T} \{ \bar{\psi}(y) \psi(x) \} - iS_F(x-y)$ | <input type="checkbox"/> |

der  $S_F(x-y)$  er Feynmans propagator for Dirac-partikler.

**Oppgave 9.**

Feynmans propagator for et reellt Klein-Gordon felt  $\varphi(x)$  er definert ved ligningen

$$i\Delta_F(x-y) = \langle \Omega | \mathcal{T} \{ \varphi(x) \varphi(y) \} | \Omega \rangle.$$

For et fritt felt med masse  $M$  kan denne propagatoren representeres ved Fourier-integralet (i naturlige enheter)

- |    |                                                                                                          |                          |
|----|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------|
| A. | $i\Delta_F(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{-i\eta^{\mu\nu}}{p^2 - M^2 + i\epsilon} e^{-ip(x-y)}$ | <input type="checkbox"/> |
| B. | $i\Delta_F(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - M^2 + i\epsilon} e^{-ip(x-y)}$               | <input type="checkbox"/> |
| C. | $i\Delta_F(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{-i}{p^2 - M^2 - i\epsilon} e^{-ip(x-y)}$              | <input type="checkbox"/> |
| D. | $i\Delta_F(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i(\not{p} + M)}{p^2 - M^2 - i\epsilon} e^{-ip(x-y)}$  | <input type="checkbox"/> |
| E. | $i\Delta_F(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i\eta^{\mu\nu}}{p^2 - i\epsilon} e^{-ip(x-y)}$        | <input type="checkbox"/> |

**Oppgave 10.**

La  $\varphi_1(x)$  være feltet definert i Lagrangetettheten (1).

Finn uttrykket for  $\langle \Omega | \mathcal{T} \{ \varphi_1(x) \varphi_1(y) \} | \Omega \rangle$  i denne modellen.