Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet NTNU

Institutt for fysikk

Faglig kontakt under eksamen:
Professor Kåre Olaussen
Telefon: 9 36 52

Eksamen i MNFFY364 RELATIVISTISK KVANTEMEKANIKK
Tirsdag 11. desember 2001
09:00–14:00

Tillatte hjelpemidler: Alternativ **C**

Typegodkjent kalkulator, med tomt minne (i henhold til liste utarbeidet av NTNU).
K. Rottman: *Matematisk formelsamling* (alle språkutgaver).
Schaum's Outline Series: *Mathematical Handbook of Formulas and Tables.*

Sensur legges ut på fagets webside, `http://bohr.phys.ntnu.no/~kolausen/SIF40AQ`, såsnart den er klar

Dette oppgavesettet er på 3 sider, pluss et vedlegg på 2 sider.

Oppgave 1

a) Tegn, i de tilfeller dette er mulig i kvante-elektrodynamikk (*QED*), Feynman diagrammene for alle bidrag av laveste ikke-trivielle orden for prosessene nedenfor. For noen tilfeller eksisterer det Feynman diagram, men prosessen er likevel ikke mulig i vakuum. Angi slike tilfeller, og forklar kort hva som gjør prosessen umulig.

1. $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$
2. $e^+e^- \to e^-e^-$
3. $e^+e^- \to \mu^+\mu^-\gamma$
4. $e^+\mu^- \to e^-\mu^+$
5. $\mu^- \to e^- + \gamma$
6. $\mu^- \to \mu^-e^+e^-$
7. $\mu^-\gamma \to \mu^-e^+e^-$
8. $e^+\gamma \to e^+\gamma$
9. $e^+\gamma \to e^+\gamma\gamma$
10. $\gamma\gamma \to \gamma$
11. $\gamma\gamma \to \gamma\gamma$
12. $\gamma\gamma \to \gamma\gamma\gamma$

b) Se nå i mer detalj på parproduksjon av leptoner, $\gamma\gamma \to \ell^+\ell^-$, der ℓ er et lepton (dvs. enten et elektron e, et myon μ, eller en tau-partikklel τ).

1. Tegn Feynman-diagrammene for alle bidrag av laveste ikke-trivielle orden for denne prosessen. Påfør diagrammene alle nødvendige impulser og indekser.

   Anta at de innkommende fotonene har kvantetall k_1, r_1 og k_2, r_2, og at det utgående leptonet (resp. anti-leptonet) har kvantetall p_1, s_1 (resp. p_2, s_2). Innfør videre $q = p_1 - k_1$ og $q' = p_1 - k_2$.
2. Bruk Feynman-reglene i vedlegget til å skrive ned de tilhørende algebraiske bidragene til spredningsamplituden $\mathcal{M}_{fi}$.
3. Betrakt prosessen fra massesenter systemet.

   Hva er den minste frekvensen, ω_{min}, som fotonene kan ha for at prosessen skal være mulig? Oppgi svaret som funksjon av massen til leptonet ℓ.
4. Bruk dimensjonsanalyse og kvalitativ informasjon fra Feynman diagrammene til å anslå størrelsesorden til det totale spredningstverrsnittet i det spesialtilfellet at fotonene har frekvens $\omega = 2\omega_{\text{min}}$. Dvs., bestem hvilken algebraisk kombinasjon av fysiske parametre tverrsnittet må avhenge av, og regn ut størrelsen på denne kombinasjonen i vanlige SI-enheter.

   Oppgitt: $m_e = 0.511$ MeV, $m_\mu = 106$ MeV og $m_\tau = 1.777$ GeV.
   $\hbar = 1.054\,572\,66 \times 10^{-34}$ J s $= 6.582\,122\,0 \times 10^{-16}$ eV s, $c = 299\,792\,458$ m s^{-1}, $e = 1.602\,177\,33 \times 10^{-19}$ C, $\alpha = e^2/(4\pi\varepsilon_0\hbar c) = 1/137.035\,9895$.
5. Det differensielle tverrsnittet for parproduksjon kan skrives på formen,
   $$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{par}} = K|\mathcal{M}_{fi}|^2, \tag{1}$$
   der $\mathcal{M}_{fi}$ er spredningsamplituden fra underpunkt 2 og $d\Omega = \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$. Bruk informasjon i vedlegget til å finne et eksplisitt uttrykk for faktoren K.
6. Det upolariserte tverrsnittet framkommer ved at vi midler over spinntilstandene (r_1, r_2) til de innkommende fotonene, og summerer over spinntilstandene (s_1, s_2) til de utgående leptonene. Amplitudekvadratet $\sum_{r_1 r_2 s_1 s_2} |\mathcal{M}_{fi}|^2$ kan da uttrykkes som en sum av spor over γ-matriser (med prefaktorer).

   Finn denne summen. Du trenger forløbig ikke å regne ut sporene.
7. Anta nå at energien til de innkommende fotonene er mye større enn hvile-energien til leptonene, $\hbar\omega \gg m_\ell c^2$, slik at man kan sette $m_\ell = 0$ i alle uttrykk. Finn i dette tilfellet eksplisitte uttrykk for følgende skalarprodukt mellom firervektorer: (a) p_1p_2, (b) p_1q, (c) p_2q, (d) p_1q', (e) p_2q', (f) q^2, (g) q'^2, (h) qq'.

   Uttrykk svaret ved frekvensen ω til et av de innkommende fotonene, og vinkelen ϑ mellom et av de innkommende fotonene og det produserte leptonet.
8. Finn i grensetilfellet fra underpunkt 7 eksplisitte uttrykk for alle sporene som inngår i $\sum_{rsr's'} |\mathcal{M}_{fi}|^2$ fra forrige punkt.
9. Finn i grensetilfellet fra underpunkt 7 eksplisitt uttrykk for det differensielle tverrsnittet $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{par}}$. Uttrykk svaret ved frekvensen ω, og vinkelen ϑ.

Oppgave 2

I denne oppgaven skal du analysere en modell for et masseløst nøytrino, definert ved Lagrangetettheten

$$\mathcal{L} = i\chi^\dagger \left(\frac{\partial}{\partial t} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nabla} \right) \chi, \tag{2}$$

der χ er en to-komponent spinor, $\chi(x) = \begin{pmatrix} \chi_1(x) \\ \chi_2(x) \end{pmatrix}$, og vi bruker enheter der $\hbar = c = 1$.

a) Finn de kanonisk konjugerte impulstetthetene Π_χ og $\Pi_{\chi^\dagger}$ til feltene χ og $\chi^\dagger$.

b) Finn Hamiltontettheten $\mathcal{H}$.

c) Finn bevegelsesligningen for feltet χ.

d) Vis at bevegelsesligningen fra forrige punkt har planbølgeløsninger på formen

$$\chi_\alpha(x) = u_\alpha(\boldsymbol{p})\, \mathrm{e}^{-ipx} \quad \text{og} \quad \chi_\alpha(x) = v_\alpha(\boldsymbol{p})\, \mathrm{e}^{ipx}, \tag{3}$$

der $p^0 > 0$ er bestemt av $\boldsymbol{p}$ ved *dispersjonsrelasjonen*.

Finn dispersjonsrelasjonen og eksplisitte uttrykk for $u_\alpha(\boldsymbol{p})$ og $v_\alpha(\boldsymbol{p})$.

e) Anta at nøytrinoet har elektrisk ladning q og befinner seg i et tidsuavhengig magnetfelt $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$, spesifisert ved et vektorpotensial $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$.

Hva blir Lagrangetettheten $\mathcal{L}$ i dette tilfellet?

f) Anta at $\boldsymbol{A} = -By\,\hat{e}_x$, slik at vi har et konstant magnetfelt B i z-retningen. Finn eksplisitt uttrykk for bevegelsesligningen for χ i dette tilfellet.

1 Sammenheng mellom amplitude $\mathcal{M}_{fi}$ og tverrsnitt σ

$$d\sigma = \frac{|\mathcal{M}_{fi}|^2}{4\sqrt{(p_1\cdot p_2)^2 - m_1^2\, m_2^2}}\,(2\pi)^4\,\delta^{(4)}(p_1 + p_2 - \sum_i p_i'\,)\prod_{i=1}^{n}\frac{d^3p_i'}{(2\pi)^3\,2E_i'} \tag{4}$$

2 Noen Feynmanregler for $-i\mathcal{M}_{fi}$:

1. Utgående partikler			2. Innkommende partikler		
Type partikler	Grafisk symbol	Algebraisk uttrykk	Type partikler	Grafisk symbol	Algebraisk uttrykk
$e^-, \mu^-, \cdots$	$\bullet\!\!\longrightarrow p, s$	$\overline{u}(p, s)$	$e^-, \mu^-, \cdots$	$p, s \longrightarrow\!\!\bullet$	$u(p, s)$
$e^+, \mu^+, \cdots$	$\bullet\!\!\longleftarrow p, s$	$v(p, s)$	$e^+, \mu^+, \cdots$	$p, s \longleftarrow\!\!\bullet$	$\overline{v}(p, s)$
γ (foton)	$\bullet\!\sim\!\sim\!\sim k, r$	$e_\mu(k, r)^*$	γ (foton)	$k, r \sim\!\sim\!\sim\!\bullet$	$e_\mu(k, r)$
Uladet spinn–0	$\bullet\cdots\cdots k$	1	Uladet spinn–0	$k\ \cdots\cdots\bullet$	1

3. Propagatorer			4. Vekselvirkningsknuter		
Type partikler	Grafisk symbol	Algebraisk uttrykk	V.virkning $\mathcal{L}_{int}$	Grafisk symbol	Algebraisk uttrykk
$e^\pm, \mu^\pm, \cdots$	$\bullet\!\!\xrightarrow{\ p\ }\!\!\bullet$	$\dfrac{i(\not p + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$	$e\overline{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$	μ	$ie\gamma^\mu$
γ (foton)	$\mu \overset{k}{\sim\!\sim\!\sim} \nu$	$\dfrac{-i\eta_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon}$	$-\dfrac{1}{3!}\mu\varphi^3$		$-i\mu$
Uladet spinn–0	$\bullet\overset{k}{\cdots\cdots}\bullet$	$\dfrac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon}$	$-\dfrac{1}{4!}\lambda\varphi^4$		$-i\lambda$

i) Konservering av firer-impuls i hver knute.

ii) Integrasjon $\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}$ over hver ubestemt impuls.

iii) Faktor -1 for hver lukket fermionsløyfe.

iv) Relativt minustegn mellom diagrammer som adskiller seg ved ombytte av to fermioner.

v) Kombinatorisk faktor $1/S$, der S er diagrammets symmetritall.

3 Noen fullstendighetsrelasjoner

Dirac partikler, Dirac antipartikler, og fotoner

$$\sum_{s=1}^{2} u(p,s)\,\overline{u}(p,s) = \not{p} + m, \qquad \sum_{s=1}^{2} v(p,s)\,\overline{v}(p,s) = \not{p} - m \tag{5}$$

$$\sum_{r=1}^{2} e_\mu(k,r)\,e^*_\nu(k,r) = -\eta_{\mu\nu} + \text{irrelevante ledd} \tag{6}$$

4 Dirac's γ-matriser

4.1 Standardrepresentasjonen

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \qquad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \tag{7}$$

der I er en 2×2 enhetsmatrise, og $\boldsymbol{\sigma}$ er Pauli-matrisene,

$$\sigma^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

som oppfyller den algebraiske relasjonen

$$\sigma^i\,\sigma^j = \delta^{ij} + i\varepsilon^{ijk}\,\sigma^k, \text{ dvs. at } (\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{a})\,(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{b}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + i\boldsymbol{\sigma}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) \tag{9}$$

4.2 Algebraiske relasjoner

$$\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\} = 2\,\eta^{\mu\nu} \quad \Longrightarrow \not{p}\,\not{p} = p^2 \tag{10}$$

$$\gamma^\mu\,\gamma^\nu\,\gamma_\mu = -2\,\gamma^\nu \quad \Longrightarrow \gamma_\mu\,\not{p}\,\gamma^\mu = -2\,\not{p} \tag{11}$$

$$\gamma^\mu\,\gamma^\nu\,\gamma^\lambda\,\gamma_\mu = 4\,\eta^{\nu\lambda} \quad \Longrightarrow \gamma_\mu\,\not{p}\,\not{q}\,\gamma^\mu = 4\,(pq) \tag{12}$$

$$\gamma^\mu\,\gamma^\nu\,\gamma^\lambda\,\gamma^\sigma\,\gamma_\mu = -2\,\gamma^\sigma\,\gamma^\lambda\,\gamma^\nu \quad \Longrightarrow \gamma_\mu\,\not{p}\,\not{q}\,\not{r}\,\gamma^\mu = -2\not{r}\,\not{q}\,\not{p} \tag{13}$$

4.3 Noen spor-uttrykk

$$\mathrm{Tr}\,1 = 4 \tag{14}$$

$$\mathrm{Tr}\,\gamma^\mu = 0 \tag{15}$$

$$\mathrm{Tr}\,\gamma^\mu\,\gamma^\nu = 4\,\eta^{\mu\nu} \quad \Longrightarrow \mathrm{Tr}\,\not{p}\,\not{q} = 4\,(pq) \tag{16}$$

$$\mathrm{Tr}\,\gamma^\mu\,\gamma^\nu\,\gamma^\lambda = 0 \tag{17}$$

$$\mathrm{Tr}\,\gamma^\mu\,\gamma^\nu\,\gamma^\lambda\,\gamma^\sigma = 4\left(\eta^{\mu\nu}\,\eta^{\lambda\sigma} - \eta^{\mu\lambda}\,\eta^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\sigma}\,\eta^{\nu\lambda}\right) \tag{18}$$

$$\Longrightarrow \mathrm{Tr}\,\not{p}\,\not{q}\,\not{r}\,\not{s} = 4(pq)(rs) - 4(pr)(qs) + 4(ps)(qr)$$