



Faglig kontakt under eksamen:  
Professor Kåre Olaussen  
Telefon: 9 36 52

**Eksamen i MNFFY364 RELATIVISTISK KVANTEMEKANIKK**

Tirsdag 11. desember 2001  
09:00–14:00

Tillatte hjelpemidler: Alternativ C

Typegodkjent kalkulator, med tomt minne (i henhold til liste utarbeidet av NTNU).

K. Rottman: *Matematisk formelsamling* (alle språkutgaver).

Schaum's Outline Series: *Mathematical Handbook of Formulas and Tables*.

Sensur legges ut på fagets webside, <http://bohr.phys.ntnu.no/~kolausen/SIF40AQ>, så snart den er klar

Dette oppgavesettet er på 3 sider, pluss et vedlegg på 2 sider.

**Oppgave 1**

- a) Tegn, i de tilfeller dette er mulig i kvante-elektrodynamikk (*QED*), Feynman diagrammene for alle bidrag av laveste ikke-trivielle orden for prosessene nedenfor. For noen tilfeller eksisterer det Feynman diagram, men prosessen er likevel ikke mulig i vakuum. Angi slike tilfeller, og forklar kort hva som gjør prosessen umulig.

1.  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$

2.  $e^+e^- \rightarrow e^-e^-$

3.  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-\gamma$

4.  $e^+\mu^- \rightarrow e^-\mu^+$

5.  $\mu^- \rightarrow e^- + \gamma$

6.  $\mu^- \rightarrow \mu^-e^+e^-$

7.  $\mu^-\gamma \rightarrow \mu^-e^+e^-$

8.  $e^+\gamma \rightarrow e^+\gamma$

9.  $e^+\gamma \rightarrow e^+\gamma\gamma$

10.  $\gamma\gamma \rightarrow \gamma$

11.  $\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma$

12.  $\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma\gamma$

- b) Se nå i mer detalj på parproduksjon av leptoner,  $\gamma\gamma \rightarrow \ell^+\ell^-$ , der  $\ell$  er et lepton (dvs. enten et elektron  $e$ , et myon  $\mu$ , eller en tau-partikkel  $\tau$ ).

1. Tegn Feynman-diagrammene for alle bidrag av laveste ikke-trivielle orden for denne prosessen. Påfør diagrammene alle nødvendige impulser og indekser.

Anta at de innkommende fotonene har kvantetall  $k_1, r_1$  og  $k_2, r_2$ , og at det utgående leptonet (resp. anti-leptonet) har kvantetall  $p_1, s_1$  (resp.  $p_2, s_2$ ). Innfør videre  $q = p_1 - k_1$  og  $q' = p_1 - k_2$ .

2. Bruk Feynman-reglene i vedlegget til å skrive ned de tilhørende algebraiske bidragene til spredningsamplituden  $\mathcal{M}_{fi}$ .

3. Betrakt prosessen fra massesenter systemet.

Hva er den minste frekvensen,  $\omega_{\min}$ , som fotonene kan ha for at prosessen skal være mulig? Oppgi svaret som funksjon av massen til leptonet  $\ell$ .

4. Bruk dimensjonsanalyse og kvalitativ informasjon fra Feynman diagrammene til å anslå størrelsesorden til det totale spredningstverrsnittet i det spesialtilfellet at fotonene har frekvens  $\omega = 2\omega_{\min}$ . Dvs., bestem hvilken algebraisk kombinasjon av fysiske parametre tverrsnittet må avhenge av, og regn ut størrelsen på denne kombinasjonen i vanlige SI-enheter.

**Oppgitt:**  $m_e = 0.511 \text{ MeV}$ ,  $m_\mu = 106 \text{ MeV}$  og  $m_\tau = 1.777 \text{ GeV}$ .

$\hbar = 1.054\,572\,66 \times 10^{-34} \text{ Js}$ ,  $\text{eV s} = 6.582\,122\,0 \times 10^{-16} \text{ eVs}$ ,  $c = 299\,792\,458 \text{ ms}^{-1}$ ,  $e = 1.602\,177\,33 \times 10^{-19} \text{ C}$ ,  $\alpha = e^2/(4\pi\epsilon_0\hbar c) = 1/137.035\,9895$ .

5. Det differensielle tverrsnittet for parproduksjon kan skrives på formen,

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{par}} = K|\mathcal{M}_{fi}|^2, \quad (1)$$

der  $\mathcal{M}_{fi}$  er spredningsamplituden fra underpunkt 2 og  $d\Omega = \sin\vartheta d\vartheta d\varphi$ . Bruk informasjon i vedlegget til å finne et eksplisitt uttrykk for faktoren  $K$ .

6. Det upolariserte tverrsnittet framkommer ved at vi midler over spinntilstandene  $(r_1, r_2)$  til de innkommende fotonene, og summerer over spinntilstandene  $(s_1, s_2)$  til de utgående leptonene. Amplitudekvadratet  $\sum_{r_1 r_2 s_1 s_2} |\mathcal{M}_{fi}|^2$  kan da uttrykkes som en sum av spor over  $\gamma$ -matriser (med prefaktorer).

Finn denne summen. Du trenger forløpbig ikke å regne ut sporene.

7. Anta nå at energien til de innkommende fotonene er mye større enn hvile-energien til leptonene,  $\hbar\omega \gg m_\ell c^2$ , slik at man kan sette  $m_\ell = 0$  i alle uttrykk. Finn i dette tilfellet eksplisitte uttrykk for følgende skalarprodukt mellom firervektorer: (a)  $p_1 p_2$ , (b)  $p_1 q$ , (c)  $p_2 q$ , (d)  $p_1 q'$ , (e)  $p_2 q'$ , (f)  $q^2$ , (g)  $q'^2$ , (h)  $qq'$ .

Uttrykk svaret ved frekvensen  $\omega$  til et av de innkommende fotonene, og vinkelen  $\vartheta$  mellom et av de innkommende fotonene og det produserte leptonet.

8. Finn i grensetilfellet fra underpunkt 7 eksplisitte uttrykk for alle sporene som inngår i  $\sum_{r s r' s'} |\mathcal{M}_{fi}|^2$  fra forrige punkt.

9. Finn i grensetilfellet fra underpunkt 7 eksplisitt uttrykk for det differensielle tverrsnittet  $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{par}}$ . Uttrykk svaret ved frekvensen  $\omega$ , og vinkelen  $\vartheta$ .

**Oppgave 2**

I denne oppgaven skal du analysere en modell for et masseløst nøytrino, definert ved Lagrangetettheten

$$\mathcal{L} = i\chi^\dagger \left( \frac{\partial}{\partial t} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nabla} \right) \chi, \quad (2)$$

der  $\chi$  er en to-komponent spinor,  $\chi(x) = \begin{pmatrix} \chi_1(x) \\ \chi_2(x) \end{pmatrix}$ , og vi bruker enheter der  $\hbar = c = 1$ .

- a) Finn de kanonisk konjugerte impulstetthetene  $\Pi_\chi$  og  $\Pi_{\chi^\dagger}$  til feltene  $\chi$  og  $\chi^\dagger$ .
- b) Finn Hamiltontettheten  $\mathcal{H}$ .
- c) Finn bevegelsesligningen for feltet  $\chi$ .
- d) Vis at bevegelsesligningen fra forrige punkt har planbølgeløsninger på formen

$$\chi_\alpha(x) = u_\alpha(\mathbf{p}) e^{-ipx} \quad \text{og} \quad \chi_\alpha(x) = v_\alpha(\mathbf{p}) e^{ipx}, \quad (3)$$

der  $p^0 > 0$  er bestemt av  $\mathbf{p}$  ved *dispersjonsrelasjonen*.

Finn dispersjonsrelasjonen og eksplisitte uttrykk for  $u_\alpha(\mathbf{p})$  og  $v_\alpha(\mathbf{p})$ .

- e) Anta at nøytrinoet har elektrisk ladning  $q$  og befinner seg i et tidsuavhengig magnetfelt  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ , spesifisert ved et vektorpotensial  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ .

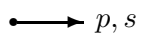
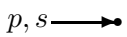
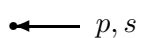
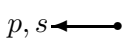
Hva blir Lagrangetettheten  $\mathcal{L}$  i dette tilfellet?

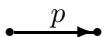
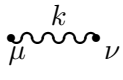
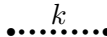
- f) Anta at  $\mathbf{A} = -By\hat{e}_x$ , slik at vi har et konstant magnetfelt  $B$  i  $z$ -retningen. Finn eksplisitt uttrykk for bevegelsesligningen for  $\chi$  i dette tilfellet.

## 1 Sammenheng mellom amplitude $\mathcal{M}_{fi}$ og tverrsnitt $\sigma$

$$d\sigma = \frac{|\mathcal{M}_{fi}|^2}{4\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - \sum_i p'_i) \prod_{i=1}^n \frac{d^3 p'_i}{(2\pi)^3 2E'_i} \quad (4)$$

## 2 Noen Feynmanregler for $-i\mathcal{M}_{fi}$ :

| 1. Utgående partikler |                                                                                     |                    | 2. Innkommende partikler |                                                                                       |                    |
|-----------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|--------------------|--------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|--------------------|
| Type partikler        | Grafisk symbol                                                                      | Algebraisk uttrykk | Type partikler           | Grafisk symbol                                                                        | Algebraisk uttrykk |
| $e^-, \mu^-, \dots$   |    | $\bar{u}(p, s)$    | $e^-, \mu^-, \dots$      |    | $u(p, s)$          |
| $e^+, \mu^+, \dots$   |    | $v(p, s)$          | $e^+, \mu^+, \dots$      |    | $\bar{v}(p, s)$    |
| $\gamma$ (foton)      |    | $e_\mu(k, r)^*$    | $\gamma$ (foton)         |    | $e_\mu(k, r)$      |
| Uladet spinn-0        |  | 1                  | Uladet spinn-0           |  | 1                  |

| 3. Propagatorer         |                                                                                     |                                                | 4. Vekselvirkningsknuter          |                                                                                       |                    |
|-------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------|-----------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|--------------------|
| Type partikler          | Grafisk symbol                                                                      | Algebraisk uttrykk                             | V.virkning $\mathcal{L}_{int}$    | Grafisk symbol                                                                        | Algebraisk uttrykk |
| $e^\pm, \mu^\pm, \dots$ |  | $\frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$ | $e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$ |  | $ie\gamma^\mu$     |
| $\gamma$ (foton)        |  | $\frac{-i\eta_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon}$      | $-\frac{1}{3!}\mu\varphi^3$       |  | $-i\mu$            |
| Uladet spinn-0          |  | $\frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon}$              | $-\frac{1}{4!}\lambda\varphi^4$   |  | $-i\lambda$        |

- Konservering av firer-impuls i hver knute.
- Integrasjon  $\int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4}$  over hver ubestemt impuls.
- Faktor  $-1$  for hver lukket fermionsløyfe.
- Relativt minustegn mellom diagrammer som adskiller seg ved ombytte av to fermioner.
- Kombinatorisk faktor  $1/S$ , der  $S$  er diagrammets symmetritall.

### 3 Noen fullstendighetsrelasjoner

Dirac partikler, Dirac antipartikler, og fotoner

$$\sum_{s=1}^2 u(p, s) \bar{u}(p, s) = \not{p} + m, \quad \sum_{s=1}^2 v(p, s) \bar{v}(p, s) = \not{p} - m \quad (5)$$

$$\sum_{r=1}^2 e_{\mu}(k, r) e_{\nu}^{*}(k, r) = -\eta_{\mu\nu} + \text{irrelevante ledd} \quad (6)$$

### 4 Dirac's $\gamma$ -matriser

#### 4.1 Standardrepresentasjonen

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

der  $I$  er en  $2 \times 2$  enhetsmatrise, og  $\boldsymbol{\sigma}$  er Pauli-matrisene,

$$\sigma^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

som oppfyller den algebraiske relasjonen

$$\sigma^i \sigma^j = \delta^{ij} + i\epsilon^{ijk} \sigma^k, \text{ dvs. at } (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \quad (9)$$

#### 4.2 Algebraiske relasjoner

$$\{\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}\} = 2\eta^{\mu\nu} \implies \not{p}\not{p} = p^2 \quad (10)$$

$$\gamma^{\mu} \gamma^{\nu} \gamma_{\mu} = -2\gamma^{\nu} \implies \gamma_{\mu} \not{p} \gamma^{\mu} = -2\not{p} \quad (11)$$

$$\gamma^{\mu} \gamma^{\nu} \gamma^{\lambda} \gamma_{\mu} = 4\eta^{\nu\lambda} \implies \gamma_{\mu} \not{p} \not{q} \gamma^{\mu} = 4(pq) \quad (12)$$

$$\gamma^{\mu} \gamma^{\nu} \gamma^{\lambda} \gamma^{\sigma} \gamma_{\mu} = -2\gamma^{\sigma} \gamma^{\lambda} \gamma^{\nu} \implies \gamma_{\mu} \not{p} \not{q} \not{r} \gamma^{\mu} = -2\not{r} \not{q} \not{p} \quad (13)$$

#### 4.3 Noen spor-uttrykk

$$\text{Tr } 1 = 4 \quad (14)$$

$$\text{Tr } \gamma^{\mu} = 0 \quad (15)$$

$$\text{Tr } \gamma^{\mu} \gamma^{\nu} = 4\eta^{\mu\nu} \implies \text{Tr } \not{p} \not{q} = 4(pq) \quad (16)$$

$$\text{Tr } \gamma^{\mu} \gamma^{\nu} \gamma^{\lambda} = 0 \quad (17)$$

$$\text{Tr } \gamma^{\mu} \gamma^{\nu} \gamma^{\lambda} \gamma^{\sigma} = 4\left(\eta^{\mu\nu} \eta^{\lambda\sigma} - \eta^{\mu\lambda} \eta^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\sigma} \eta^{\nu\lambda}\right) \quad (18)$$

$$\implies \text{Tr } \not{p} \not{q} \not{r} \not{s} = 4(pq)(rs) - 4(pr)(qs) + 4(ps)(qr)$$